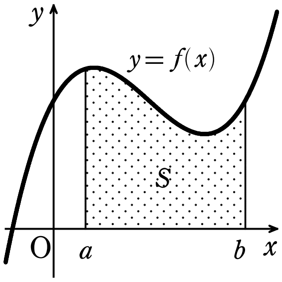
積分法とその応用【定積分と不等式】　p.228～230

□定積分と不等式



関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続であり，かつ $f(x) \geqq 0$ であるとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S について考える。

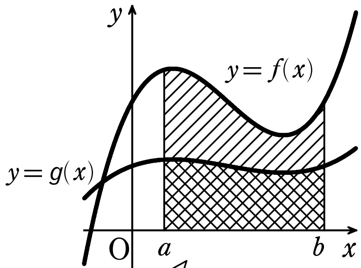
$[a,\ b]$ で常に $f(x)=0$ ならば $S=0$，$[a,\ b]$ で $f(x)>0$ となる x があるならば $S>0$ である。よって，次のことが成り立つ。

区間 $[a,\ b]$ でつねに $f(x) \geqq 0$　ならば　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$

等号は，常に $f(x)=0$ のときに成り立つ。

さらに次のことが成り立つ。

> **定積分と不等式**
>
> 区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$，$g(x)$ について
>
> $f(x) \geqq g(x)$　ならば　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$
>
> 等号は，常に $f(x)=g(x)$ のときに成り立つ。



常に上下が変わらないなら
面積の大小も確定する

例題１１） 次のことを示せ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき　　$\dfrac{1}{x^2+x+1} \geqq \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \frac{1}{2}$

解答

(1)　$x \geqq 0$ のとき　　$x^2+x+1 \leqq (x^2+x+1)+x$　　x の分大きい

すなわち　　$x^2+x+1 \leqq (x+1)^2$

両辺は正であるから，逆数をとって

$$\frac{1}{x^2+x+1} \geqq \frac{1}{(x+1)^2}$$

(2)　(1) の不等式では，常には $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ でないから　等号は成立しない

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$$

つねに大小関係が成り立つので
$\displaystyle\int_0^1 dx$ をつけても　大小関係は変わらない

右辺は　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_0^1 (x+1)^{-2}dx = \Big[-(x+1)^{-1}\Big]_0^1 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$

よって　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} > \frac{1}{2}$

積分法とその応用【定積分と不等式】　p.228～230

問） $x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{1}{(x+1)^2} \leqq \dfrac{1}{x^2+x+1} \leqq \dfrac{1}{x+1}$ であることを示し，

これを用いて不等式 $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2+x+1} < \log 2$ を証明せよ。

解答

x の分大きい　　x^2 の分大きい

$x \geqq 0$ であるから　$x^2+2x+1 \geqq x^2+x+1 \geqq x+1$

すなわち　$(x+1)^2 \geqq x^2+x+1 \geqq x+1$

各辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{(x+1)^2} \leqq \dfrac{1}{x^2+x+1} \leqq \dfrac{1}{x+1}$

各辺が正なので
逆数にすると
大小反転

が成り立つ。しかも，$0 < x < 1$ で等号は成り立たない。

つねに大小関係が成り立つので
$\displaystyle\int_0^1 dx$ をつけても
大小関係は変わらない

よって　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} < \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$

$$\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 < \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \Big[\log(x+1)\Big]_0^1$$

$$\int_0^1 (x+1)^{-2}dx = \Big[-1\cdot(x+1)^{-1}\cdot 1\Big]_0^1 = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1$$

ここで $\left[-\dfrac{1}{x+1}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{1}{1}\right) = -\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$

$$\Big[\log(x+1)\Big]_0^1 = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

ゆえに　$\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \log 2$

積分法とその応用【定積分と不等式】　p.228～230

応用例題７） 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ。

$$\log n > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} > \log(n+1)$$　ただし，n は自然数

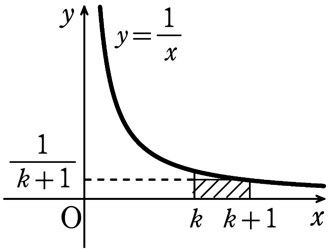
考え方　自然数 k に対して，$k \leqq x \leqq k+1$ では $f(x) \geqq f(k+1)$ である。

常には $f(x)=f(k+1)$ でないから，$\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx > \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx$ が成り立つ。

証明

自然数 k に対して，$k \leqq x \leqq k+1$ では

$$\frac{1}{x} \geqq \frac{1}{k+1}$$



常には $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{k+1}$ でないから

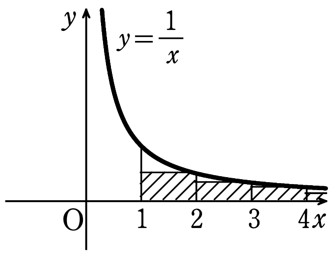
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx > \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx$$

すなわち

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} > \frac{1}{k+1}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx = \frac{1}{k+1}\int_k^{k+1} dx = \frac{1}{k+1}\Big[\,x\,\Big]_k^{k+1} = \frac{1}{k+1}(k+1-k) = \frac{1}{k+1}$$

$k=1$，2，3，……，$n-1$ として，辺々を加えると



$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{x}+\int_2^3\frac{dx}{x}+\int_3^4\frac{dx}{x}+\cdots\cdots+\int_{n-1}^{\boxed{n}}\frac{dx}{x} > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

ここで　　左辺 $=\displaystyle\int_{1}^{\boxed{n}}\frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_1^n = \log n - \log 1 = \log n$

$\log 1 = 0$

よって　　$\log n > \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}$

練習３１） 次のことを示せ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$\dfrac{1}{x+1} \geqq \dfrac{1}{x^2+x+1}$

(2)　$\log 2 > \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

練習３２） 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)$$ ただし，n は自然数

練習３１） 次のことを示せ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$\dfrac{1}{x+1} \geqq \dfrac{1}{x^2+x+1}$

(2)　$\log 2 > \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

(解説)

(1)　$x+1 \leqq x^2+x+1$

$x \geqq 0$ のとき，両辺は正であるから，逆数をとって

$$\frac{1}{x+1} \geqq \frac{1}{x^2+x+1}$$

(2)　(1) の不等式では，常には $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ でないから

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} > \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

左辺は　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \Big[\log|x+1|\Big]_0^1 = \log 2$

よって　$\log 2 > \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

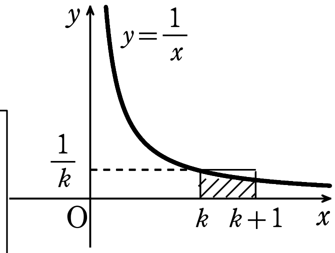
練習３２）関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)\qquad \text{ただし，}n\text{ は自然数}$$

(解説)

自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$

では　$\dfrac{1}{k}\geqq\dfrac{1}{x}$



また，$k<x<k+1$ で

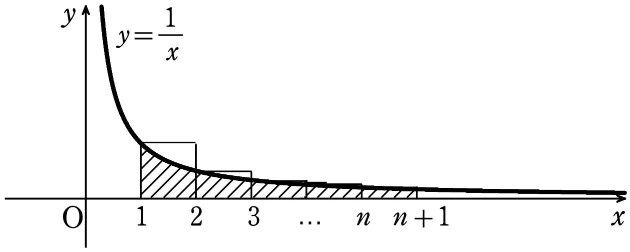
常には $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{k}$ でないから

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx>\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$$

すなわち

$$\frac{1}{k}>\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$$

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx&=\frac{1}{k}\int_k^{k+1}dx\\&=\frac{1}{k}\Big[x\Big]_k^{k+1}\\&=\frac{1}{k}(k+1-k)\\&=\frac{1}{k}\end{aligned}$$



$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ として，

辺々を加えると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^2\frac{dx}{x}+\int_2^3\frac{dx}{x}+\int_3^4\frac{dx}{x}+\cdots\cdots+\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$$

ここで右辺は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}&=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}\\&=\Big[\log|x|\Big]_1^{n+1}\\&=\log(n+1)-\log 1\qquad \leftarrow \log 1=0\\&=\log(n+1)\end{aligned}$$

よって　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}>\log(n+1)$　(終)