積分法とその応用【面積】 p.232～236

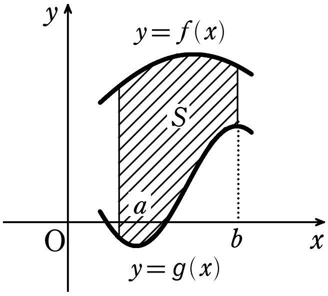
□**面積**

２曲線間の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2つの曲線 $y=f(x)$， $y=g(x)$ と2直線 $x=a$， $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

数Ⅱと同じく，上－下

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



練習３４） 曲線 $y=e^x-e$ と x 軸および2直線 $x=0$， $x=2$ で囲まれた2つの部分の面積の和 S を求めよ。

解答 この曲線と x 軸の共有点の x 座標は，

まずは交点

方程式 $e^x-e=0$ を解いて $x=1$

区間 $0 \leqq x \leqq 1$ では，常に $y \leqq 0$，

区間 $1 \leqq x \leqq 2$ では，常に $y \geqq 0$

であるから，求める面積の和 S は

$$S=\int_0^1 \{0-(e^x-e)\}dx+\int_1^2 \{(e^x-e)-0\}dx$$

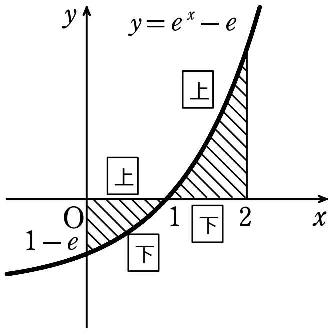
$$=\int_0^1 (-e^x+e)dx+\int_1^2 (e^x-e)dx$$

$$=-\Big[e^x-ex\Big]_0^1+\Big[e^x-ex\Big]_1^2$$

$$=-\{(e-e)-(e^0-0)\}+\{(e^2-2e)-(e-e)\}$$

$$=1+e^2-2e$$

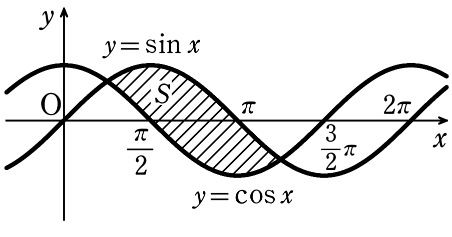
$$=e^2-2e+1$$



例題１２） $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲において，

2つの曲線 $y=\sin x$， $y=\cos x$

で囲まれた右の図の斜線部分の面積 S を求めよ。



解答 2つの曲線の共有点の x 座標は，

方程式 $\sin x=\cos x$ の解である。

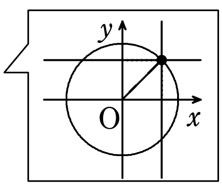
$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で解くと

■その１～合成して解く

$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

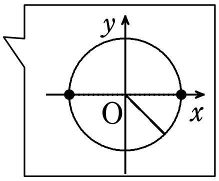
$$=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

であるから



$-\frac{\pi}{4} \leqq x-\frac{\pi}{4} \leqq 2\pi-\frac{\pi}{4}$　より　$x-\frac{\pi}{4}=0,\ \pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$



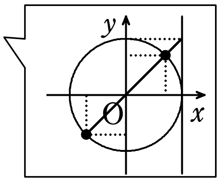
■その２～ $\tan x$ にして解く

方程式 $\sin x=\cos x$ は

$\frac{\sin x}{\cos x}=1$ より　$\tan x=1$ であるから

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で解くと

$\therefore x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$



$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{5}{4}\pi$ では，$\sin x \geqq \cos x$ であるから

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$=\left(-\cos\frac{5}{4}\pi-\sin\frac{5}{4}\pi\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{2}$$

$$=2\sqrt{2}$$

積分法とその応用【面積】　p.232〜236

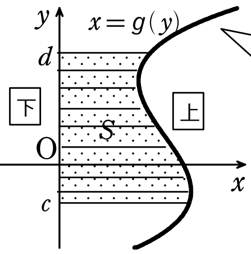
□曲線 $x=g(y)$ と面積

y の関数 $x=g(y)$ で表される曲線については，次のことが成り立つ。

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \geqq 0$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_c^d g(y)\,dy$$

$x=$(y の式) の形であることに注意
⇒範囲や dy



x，y の位置を入れ替える（裏から透かす）と「上−下」がわかりやすいときの話

例１１）　曲線 $y=\log x$ と x 軸，y 軸および直線 $y=1$ で囲まれた部分の面積 S を求める。

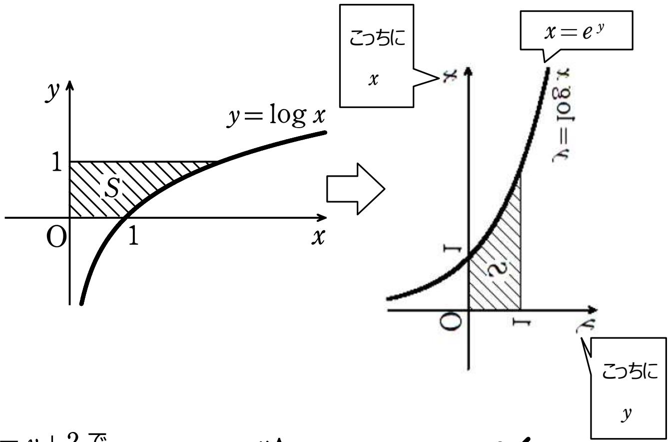
$y=\log x$ より　$x=e^y$

常に $e^y>0$ であるから

$$S=\int_0^1 e^y dy$$

$$=\Big[e^y\Big]_0^1$$

$$=e-1$$ 終



例題１３） 曲線 $x=y^2$ と直線 $x=y+2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　曲線と直線の共有点の y 座標は，方程式 $y^2=y+2$ の解である。

$y^2-y-2=0$ より　$(y-2)(y-1)=0$

$\therefore$　$y=-1,\ 2$

$-1 \leqq y \leqq 2$ では，$y+2 \geqq y^2$ であるから

$$S=\int_{-1}^2 \{(y+2)-y^2\}dy$$

$$=\int_{-1}^2 (-y^2+y+2)dy$$

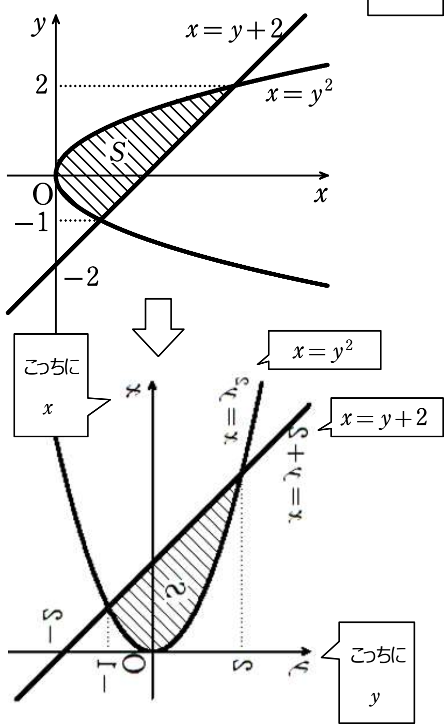
$$=\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y\right]_{-1}^2$$

$$=\frac{9}{2}$$

$\frac{1}{6}$ 公式を使えば

$$\frac{|-1|}{6}\{2-(1)\}^3$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 3^3=\frac{9}{2}$$



積分法とその応用【面積】　p.232～236

□いろいろな式で表される曲線と面積

応用例題８） $a>0$，$b>0$ とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ

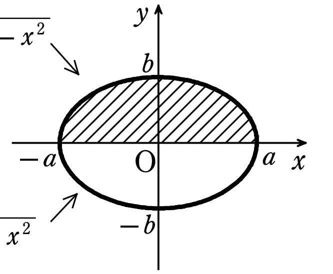
$\boxed{\text{方針}}$ この楕円は x 軸に関して対称である。$y\geqq 0$ のとき，方程式を y について解き，

$y\geqq 0$ の部分の面積を 2 倍すればよい。

ちなみに「上－下」をやっても
２倍となるので結果は同じ

$\boxed{\text{解答}}$ 求める面積 S は，右の図の斜線部分の

面積を 2 倍したものに等しい。



方程式を y について解くと

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2$$

$$y^2=\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$y\geqq 0$ のとき，　$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

よって

$$S=2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

ここで，$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，半径 a の円の面積の半分である。

$x=a\sin\theta$ と置くことも考えられるが，楽な方法で。
ただしこの積分が円の面積を指すことに触れておこう

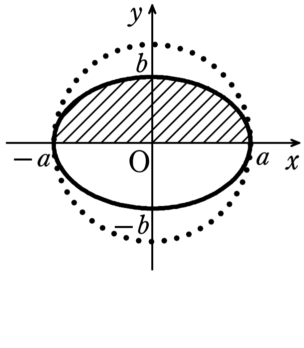
したがって　$S=\dfrac{2b}{a}\cdot\dfrac{1}{2}\pi a^2=\pi ab$

$\boxed{\text{公式}}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形の面積 S は，$S=\pi ab$ である

$\boxed{\text{別解}}$

楕円は円を圧縮（右図であれば縦方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍）

したものであるから



$$S=\frac{b}{a}\times\pi a^2=\pi ab$$

となる

積分法とその応用【面積】　p.232～236

応用例題４）

$a>0$ とする。$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において，サイクロイド

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

方針　曲線と x 軸の共有点の x 座標は，

$x=0$，$2\pi a$ であるから，

$S=\displaystyle\int_0^{2\pi a} y\,dx$ である。

これを置換積分法によって求める。

$y=0$ と $y=a(1-\cos\theta)$ より

$a(1-\cos\theta)=0$

$a\fallingdotseq 0$ なので

$\cos\theta=1$

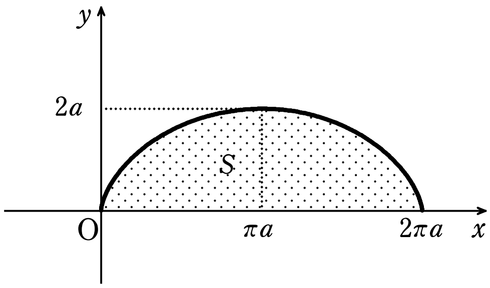
$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において

$\theta=0,\ 2\pi$

このとき

$x=a(0-\sin 0)=0$

$x=a(2\pi-\sin 2\pi)=2\pi a$



解答　求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから

$$S=\int_0^{2\pi a} y dx$$

また，$x=a(\theta-\sin\theta)$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$$

$\therefore\ \ dx=a(1-\cos\theta)d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

よって，置換積分法により

x	$0\longrightarrow 2\pi a$
θ	$0\longrightarrow 2\pi$

$x=0$ のとき

$a(\theta-\sin\theta)=0$

$a\fallingdotseq 0$ より

$\sin\theta=\theta$

$\therefore\theta=0$

$x=2\pi a$ のとき

$a(\theta-\sin\theta)=2\pi a$

$a\fallingdotseq 0$ より

$\theta-\sin\theta=2\pi$

$\therefore\ \theta=2\pi$

$$\begin{aligned}
S&=\boxed{\int_0^{2\pi a}}\ \boxed{y}\ \boxed{dx}\\
&=\boxed{\int_0^{2\pi}}\boxed{a(1-\cos\theta)}\cdot\boxed{a(1-\cos\theta)d\theta}\\
&=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\underline{\underline{\cos^2\theta}})d\theta\\
&=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\underline{\underline{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}}\right)d\theta\\
&=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta\\
&=a^2\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\\
&=a^2\{(3\pi-0+0)-(0-0+0)\}\\
&=3\pi a^2
\end{aligned}$$

$\sin 0=\sin 2\pi=0$ なので

計算を略する

練習３３）次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{x}$，$x=1$，$x=e$　　　(2)　$y=\sqrt{x+1}$，$x=0$，$x=3$

練習３４）曲線 $y=e^x-e$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

練習３５） 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

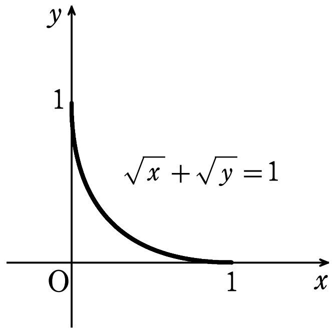
(1)　$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$　　(2)　$x+4y=5$，$xy=1$

練習３６） 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$x=y^2+1$，x 軸，y 軸，$y=2$　　(2)　$x=y^2-1$，$x=y+5$

練習３７） 曲線 $4x^2+2y^2=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

練習３８） 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ は右の図のようになる。この曲線と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。



練習３９） 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$x=3\cos\theta,\ y=2\sin\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

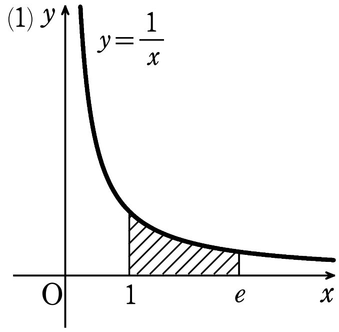
練習３３） 次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

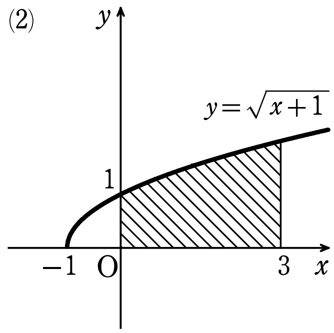
(1)　$y=\dfrac{1}{x}$，$x=1$，$x=e$　　　　(2)　$y=\sqrt{x+1}$，$x=0$，$x=3$

(解説)

(1)　求める面積 S は　$S=\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}dx=\Big[\log|x|\Big]_1^e=1$

(2)　求める面積 S は　$S=\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$





練習３４） 曲線 $y=e^x-e$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

(解説)

$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$e^x-e\leqq 0$

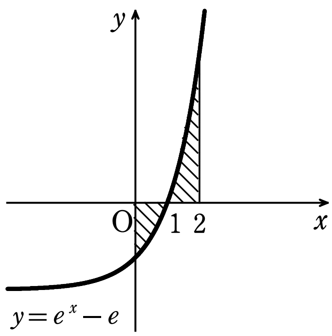
$1\leqq x\leqq 2$ のとき　$e^x-e\geqq 0$

であるから

$$S=\int_0^1\{-(e^x-e)\}dx+\int_1^2(e^x-e)dx$$

$$=-\Big[e^x-ex\Big]_0^1+\Big[e^x-ex\Big]_1^2$$

$$=e^2-2e+1$$



練習３５） 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$　　　　(2)　$x+4y=5$，$xy=1$

(解説)

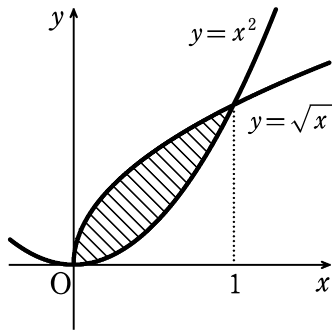
(1)　2つの曲線の共有点の x 座標は，方程式 $x^2=\sqrt{x}$ の解である。

これを解くと　　$x=0$，1

$0 \leqq x \leqq 1$ では $\sqrt{x} \geqq x^2$ であるから

$$S=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$



(2)　$x+4y=5$，$xy=1$ から y を消去して

$$x\cdot\frac{1}{4}(5-x)=1$$

式を整理すると

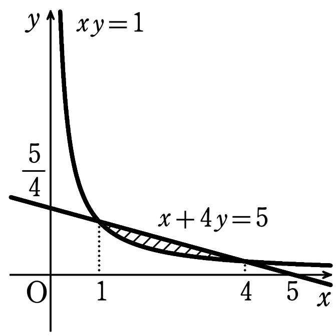
$$x^2-5x+4=0$$

直線と曲線の共有点の x 座標は，この方程式を解いて

$$x=1,\ 4$$

$1 \leqq x \leqq 4$ では $\frac{1}{4}(5-x) \geqq \frac{1}{x}$ であるから

$$S=\int_1^4 \left\{\frac{1}{4}(5-x)-\frac{1}{x}\right\}dx=\left[\frac{5}{4}x-\frac{x^2}{8}-\log|x|\right]_1^4=\frac{15}{8}-2\log 2$$



練習３６） 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$x=y^2+1$，x 軸，y 軸，$y=2$　　　　(2)　$x=y^2-1$，$x=y+5$

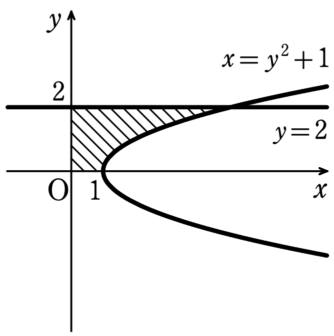
(解説)

(1)　常に $y^2+1>0$ であるから

$$S=\int_0^2 (y^2+1)dy$$

$$=\left[\frac{y^3}{3}+y\right]_0^2$$

$$=\frac{14}{3}$$



(2) $x=y^2-1$, $x=y+5$ から x を消去して

$$y^2-1=y+5$$

式を整理すると　$y^2-y-6=0$

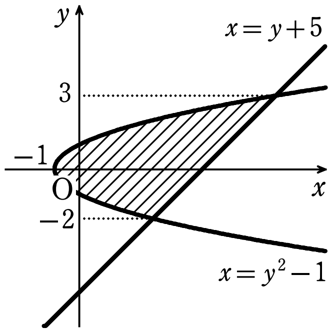
直線と曲線の共有点の y 座標は，この方程式を解いて

$$y=-2,\ 3$$

$-2\leqq y\leqq 3$ では $y+5\geqq y^2-1$ であるから

$$S=\int_{-2}^{3}\{(y+5)-(y^2-1)\}dy$$

$$=\int_{-2}^{3}(-y^2+y+6)dy=\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+6y\right]_{-2}^{3}=\frac{125}{6}$$

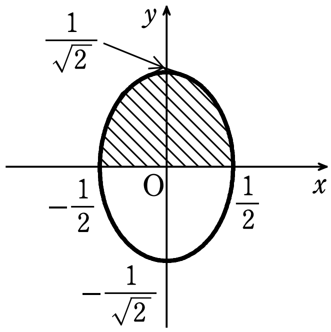


練習３７）曲線 $4x^2+2y^2=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(解説)

$4x^2+2y^2=1$ より

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$



求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積を 2 倍したものに等しい。

$y\geqq 0$ のとき，方程式を y について解くと

$$y=\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2}$$

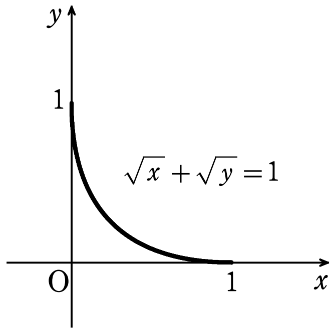
よって

$$S=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2}\,dx=2\sqrt{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2}\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2}\,dx$ は，半径 $\frac{1}{2}$ の円の面積 $\frac{\pi}{4}$ の半分である。

したがって　　$S=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

練習３８） 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ は右の図のようになる。この曲線と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。



(解説)

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ から　　$y=(1-\sqrt{x})^2$

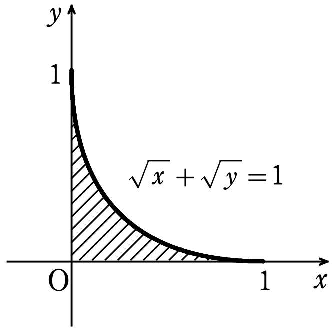
また　　$0\leqq x\leqq 1$

よって

$$S=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2dx$$

$$=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx$$

$$=\left[x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$



練習３９） 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$x=3\cos\theta,\ y=2\sin\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$$

(解説)

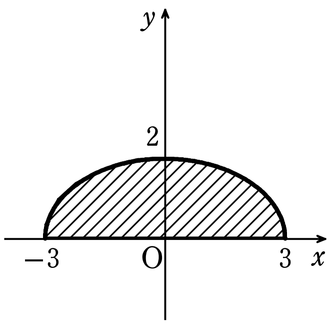
求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから

$$S=\int_{-3}^3 y\,dx$$

また，$x=3\cos\theta$ より　　$dx=-3\sin\theta\,d\theta$

x と θ の対応は次のようになる。

x	$-3\to 3$
θ	$\pi\to 0$



よって，置換積分法により

$$S=\int_{-3}^3 y\,dx=\int_\pi^0 2\sin\theta\cdot(-3\sin\theta)d\theta=6\int_0^\pi\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=3\int_0^\pi(1-\cos 2\theta)d\theta=3\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^\pi=3\pi$$