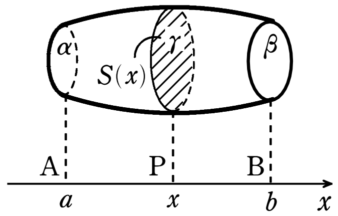
積分法とその応用【体積】　p.237～243

□体 積

立体図形の体積についても，区分求積法の考えを利用して定積分で表すことができる。

右の図のように，立体が x 軸に垂直な 2 平面 α，β に挟まれているとする。この挟まれた部分の体積を V とし，2 平面 α，β と x 軸との交点 A，B の座標を，それぞれ a，b とする。ただし，$a<b$ である。

このとき，座標が x である点 P を通り，x 軸に垂直な平面 γ で立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると，体積 V は次の式で与えられる。



断面積 $S(x)$ と立体の体積 V

$$V=\int_a^b S(x)\,dx \qquad \text{ただし，}a<b$$

【解説】区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分して，

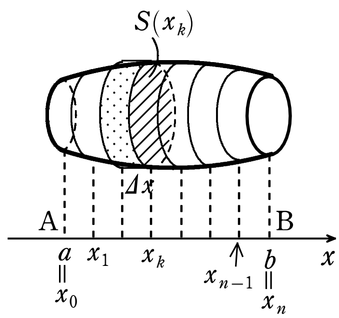
その分点の座標を，a に近い方から順に

x_1，x_2，x_3，……，x_{n-1}

とし，次のようにおく。

$a=x_0$，$b=x_n$，$\dfrac{b-a}{n}=\Delta x$

そして，各分点を通り，x 軸に垂直な平面でこの立体を分割する。このとき



$$V_n=S(x_1)\Delta x+S(x_2)\Delta x+\cdots\cdots+S(x_n)\Delta x$$

$$=\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x$$

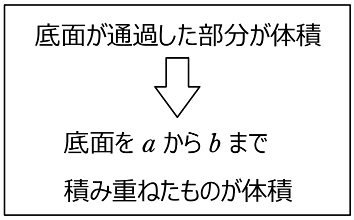
細分化された円柱の和

とすると，$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$V_n \longrightarrow V$ と考えられる。

細分化された円柱の厚さを

薄くしていく⇒なめらかになっていく



よって，「区分求積法と定積分」の関係から

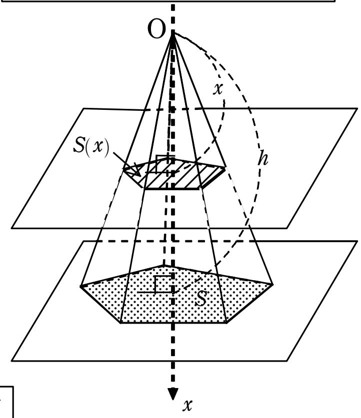
$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x=\int_a^b S(x)\,dx$$ 終

積分法とその応用【体積】　p.237～243

練習４０）　底面積が S，高さが h の角錐の体積 V を，積分を用いて求めよ。

注意 図は五角形で書いているが，
特に指定があるわけではない
（多角形なら何でも良い）

解答　この直円錐の頂点から底面に垂線を下ろし，
これを x 軸とし，頂点を原点 O にとる。
（下の図のように見た方がわかりこともある）



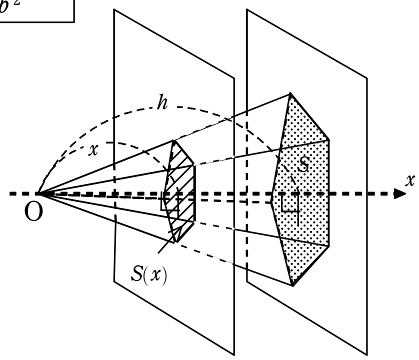
x 軸上の座標が x である点を通り，x 軸に垂直な
平面で角錐を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。
この断面は底面の多角形と相似である。

高さの比が $x:h$ であるから相似比も $x:h$
断面と底面の相似比は $x:h$ であるから，
面積比は

$$S(x):S=x^2:h^2$$

$$x^2\cdot S=h^2\cdot S(x)$$

相似比が $a:b$ ならば
面積比は $a^2:b^2$



よって　$S(x)=\dfrac{S}{h^2}x^2$

$S(x)$ は x の関数

したがって　$V=\displaystyle\int_0^h S(x)\,dx$

$\dfrac{S}{h^2}$ は x の無関係なので
外に出す

$$=\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx$$

$$=\frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx$$

$$=\frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}$$

$$=\frac{1}{3}Sh$$

底面が通過した部分が体積

⇩

底面を a から b まで
積み重ねたものが体積

⇩

底面は（一定の）変形
をしていてもＯＫ

→例題１４へ…ではあるが
例題１４は底面が半径 r の円となる訳であるから $S=\pi r^2$
よって　$S(x):S=x^2:h^2$ より $S(x)=\dfrac{S}{h^2}x^2=\dfrac{\pi r^2}{h^2}x^2$
これを 0 から h まで積分すればよい。
（$V=\dfrac{1}{3}Sh$ に $S=\pi r^2$ を代入しても結果は同じ）

積分法とその応用【体積】 p.237～243

応用例題１０）

半径 a の円 O がある。この直径 AB 上の点 P を通り直線 AB に垂直な弦 QR を底辺とし，高さが h である二等辺三角形を，円 O の面に対して垂直に作る。

P が A から B まで動くとき，この三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

方針 … 円の中心 O を原点に，直線 AB を x 軸にとる。点 P の座標を x とし，

二等辺三角形の面積を x の式で表す。

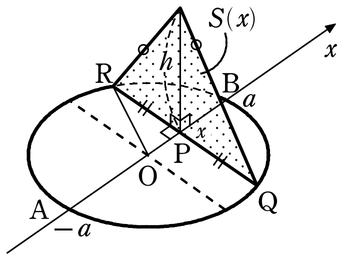
解答 円の中心 O を原点に，直線 AB を x 軸にとる。

点 P の座標を x とすると

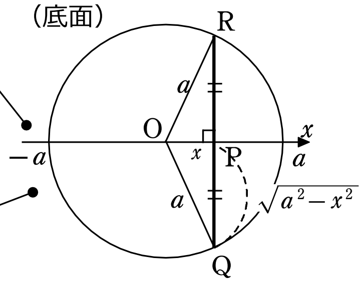
（△OPQにおいて三平方の定理により）

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\mathrm{QR}=2\mathrm{PQ}=2\sqrt{a^2-x^2}$$



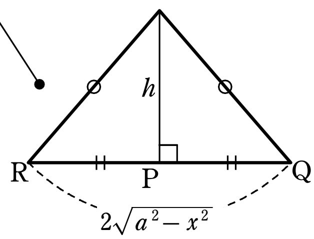
（底面）



よって，線分 QR を底辺とする

高さ h の二等辺三角形の面積 $S(x)$ は

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2-x^2}\cdot h=h\sqrt{a^2-x^2}$$



したがって

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)\,dx$$

範囲は

$-a$ から a まで

$$=\int_{-a}^{a}h\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=h\cdot\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=h\cdot\frac{1}{2}\pi a^2$$

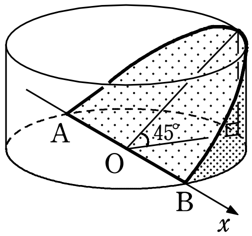
$$=\frac{1}{2}\pi a^2 h$$

<補足> $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，

半径 a の円の面積の半分で $\frac{1}{2}\pi a^2$ である。

積分法とその応用【体積】　p.237～243

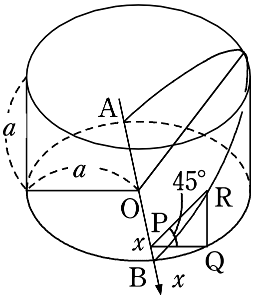
練習４１） 底面の半径が a で高さも a である直円柱がある。
この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で，
直円柱を 2 つの立体に分けるとき，
小さい方の立体の体積 V を求めよ。



解答

底面の円の中心 O を原点に，直線 AB を x 軸にとする。
線分 AB 上の点 P を通り，x 軸に垂直な平面で立体を
切ったときの断面を右の図のように △PQR とし，
P の座標を x とすると　$\mathrm{PO}=x$

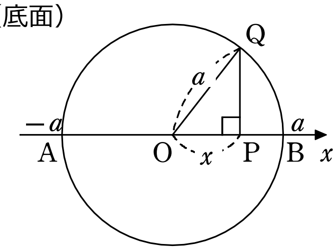
$$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=\sqrt{a^2-x^2}$$



よって，△PQR の面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$$
$$=\frac{1}{2}(a^2-x^2)$$

（底面）



したがって

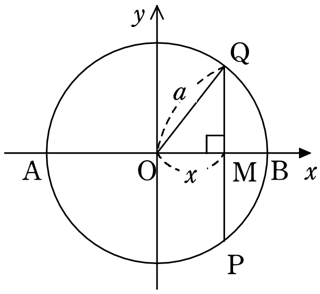
$$V=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}(a^2-x^2)dx$$

範囲は
$-a$ から a まで

$$=\int_{0}^{a}(a^2-x^2)dx$$
$$=\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$
$$=\frac{2}{3}a^3$$

ヒント　円の中心 O を原点に，直線 AB を x 軸にとる。点 P の座標を x とし，
二等辺三角形の面積を x の式で表す。

（底面）



△OMQで三平方の定理により

$$a^2=x^2+\mathrm{MQ}^2$$

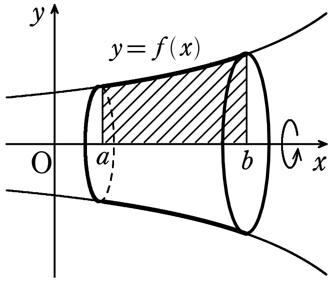
$\mathrm{MQ}>0$ なので

$$\mathrm{MQ}=\sqrt{a^2-x^2}$$

これを用いて△PQRの面積を表そう

積分法とその応用【体積】　p.237～243

□x 軸の周りの回転体の体積



右の図のように，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えてみよう。

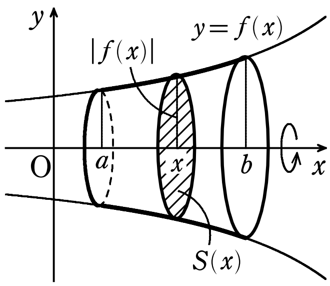
断面積 $S(x)$ と立体の体積 Vは

$$V=\int_a^b S(x)dx \qquad ただし，a<b$$

である。回転体の場合，点 $(x,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な平面でこの回転体を切ると，断面は半径が $|f(x)|$ の円である。その断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\pi|f(x)|^2=\pi\{f(x)\}^2$$

であるから，次の公式が成り立つ。



x 軸の周りの回転体の体積

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2dx=\pi\int_a^b y^2dx$$

ただし，$a<b$

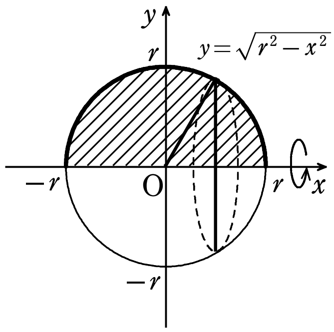
$f(x)$ や y は回転体の外周になる線

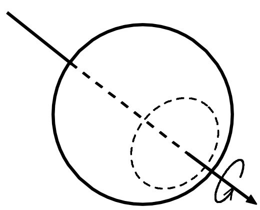
例題１５） 半径 r の球の体積 V は，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ であることを示せ。

解答　半径 r の球は，区間 $-r\leqq x\leqq r$ において半円 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる。
よって

$$\begin{aligned} V&=\pi\int_{-r}^{r} y^2dx \\ &=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx \\ &=2\pi\int_0^r(r^2-x^2)dx \\ &=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r \\ &=\frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

身の上に心配あると参上（球の体積の公式）

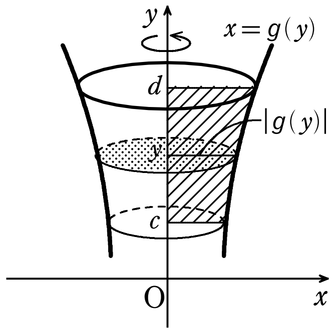




積分法とその応用【体積】　p.237～243

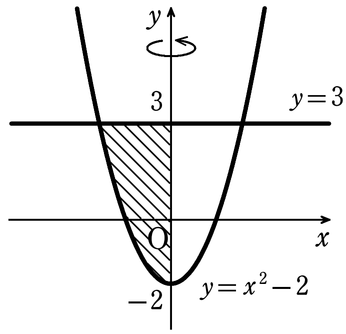
□y 軸の周りの回転体の体積

右の図のように，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えてみよう。この場合も，x 軸の周りの回転体の体積と同様に考えれば，次の公式が成り立つ。



> **y 軸の周りの回転体の体積**
>
> $$V=\pi\int_c^d\{g(y)\}^2dy=\pi\int_c^d x^2dy$$
>
> ただし，$c<d$

例題１６） 放物線 $y=x^2-2$ と直線 $y=3$ で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。



解答　$y=x^2-2$ を x について整理すると

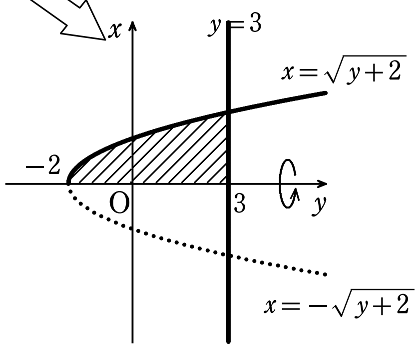
$$y+2=x^2$$

$$\pm\sqrt{y+2}=x$$

$x\geqq 0$ とすると　$x=\sqrt{y+2}$

この曲線を

y 軸の周りに回転させると



$$V=\pi\int_{-2}^{3}x^2dy$$

$$=\pi\int_{-2}^{3}(y+2)dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}+2y\right]_{-2}^{3}$$

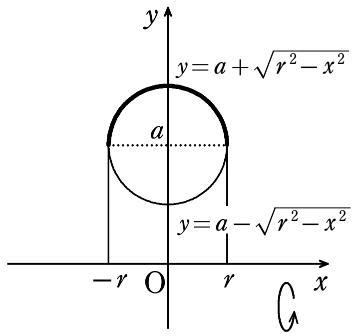
$$=\pi\left\{\left(\frac{9}{2}+6\right)-\left(\frac{4}{2}-4\right)\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}+6+4\right)$$

$$=\pi\left(\frac{5}{2}+\frac{20}{2}\right)$$

$$=\frac{25}{2}\pi$$

応用例題１１） $0<r<a$ とする。円 $x^2+(y-a)^2=r^2$を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。



解答　$x^2+(y-a)^2=r^2$ を y について解くと

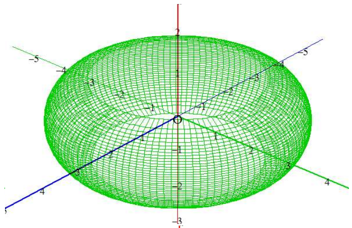
$(y-a)^2=r^2-x^2$

$y-a=\pm\sqrt{r^2-x^2}$

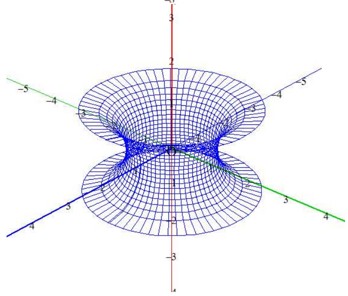
$\therefore\quad y=a\pm\sqrt{r^2-x^2}$

半円 $y=a+\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸および
2 直線 $x=-r$，$x=r$ で囲まれた部分が
x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の
体積を V_1，
半円 $y=a-\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸および
2 直線 $x=-r$，$x=r$ で囲まれた部分が
x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の
体積を V_2 とすると

V_1 を横に倒したもの



V_2 を横に倒したもの



$$V_1=\pi\int_{-r}^{r}(a+\sqrt{r^2-x^2})^2dx$$
$$=\pi\int_{-r}^{r}(a^2+2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)dx\,,$$
$$V_2=\pi\int_{-r}^{r}(a-\sqrt{r^2-x^2})^2dx$$
$$=\pi\int_{-r}^{r}(a^2-2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)dx$$

よって　$V=V_1-V_2=4\pi a\boxed{\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx}$

原点中心，半径 r の円の半円の面積

$$=4\pi a\cdot\boxed{\frac{1}{2}\pi r^2}$$
$$=2\pi^2r^2a$$

補足　応用例題の回転体は右のようになる。この立体を**円環体（トーラス）**という。

別解　パップス・ギュルダンの定理

詳しい説明は省略しますが…簡単に説明すると

（回転体の体積）＝（回転させたい図形の面積）×（重心の動いた距離）

（回転体の表面積）＝（回転させたい図形の周囲の長さ）×（重心の動いた距離）

ただし重心の求め方や、図形が自分自身と重ならないことなど注意も必要

例　回転させたい図形（円）の面積は　πr^2

円の重心は中心なので，中心の軌道は半径 a の円の円周と一致する　ゆえに $2\pi a$

したがって　$V=\pi r^2\times 2\pi a=2\pi^2r^2a$

積分法とその応用【体積】　p.237～243

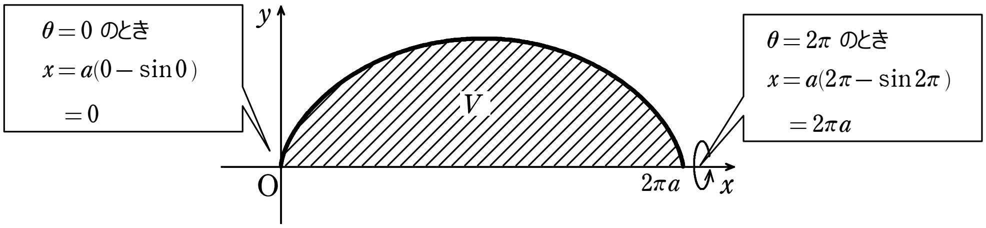
応用例題１２）

$a>0$ とする。サイクロイド

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta)\quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

考え方 … 面積の場合と同じように，置換積分法を利用する。



解答　体積 V は　$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2\,dx$,

$x=a(\theta-\sin\theta)$ であるから θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$$

よって　$dx=a(1-\cos\theta)\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 2\pi a$
θ	$0\longrightarrow 2\pi$

上のグラフから対応が分かる

よって，置換積分法により

$$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\cdot a(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$y=a(1-\cos\theta)$
$dx=a(1-\cos\theta)d\theta$
範囲の変換

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3\,d\theta$$
$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)\,d\theta$$

ここで部分ごとに計算すると

$$\int_0^{2\pi} d\theta=2\pi,\quad \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=\Big[\sin\theta\Big]_0^{2\pi}=0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$
$$=\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{2\pi}=0$$

別解

$\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$ より

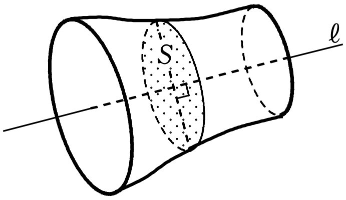
$$\cos^3\theta=\frac{1}{4}(\cos 3\theta+3\cos\theta)$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\cos 3\theta+3\cos\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3\theta+3\sin\theta\right]_0^{2\pi}$$
$$=0$$

したがって

$$V=\pi a^3(2\pi-3\cdot 0+3\cdot\pi-0)$$
$$=5\pi^2a^3$$

研究　一般の回転体の体積

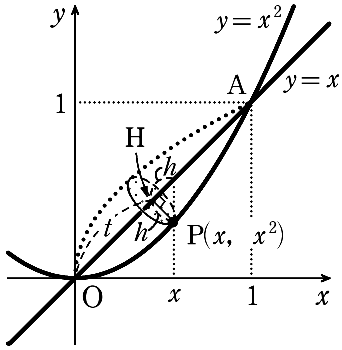


空間における直線 ℓ の周りの回転体の体積を求めるには，直線 ℓ に垂直な平面で回転体を切った切り口の面積 S の定積分を考えればよい。

例えば，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を，直線 $y=x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めてみよう。

放物線と直線の交点は $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1)$ で，$\mathrm{OA}=\sqrt{2}$ である。

$0\leqq x\leqq 1$ とし，放物線上の点 $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ から直線に垂線 PH を下ろし，$\mathrm{PH}=h$，$\mathrm{OH}=t$ とおく。



H を通り，直線 $y=x$ に垂直な平面による立体の切り口の面積を $S(t)$ とすると

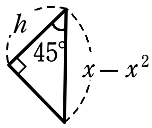
$$V=\int_0^{\sqrt{2}} S(t)\,dt$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}} h^2\,dt$$

ここで　$1:\sqrt{2}=h:(x-x^2)$

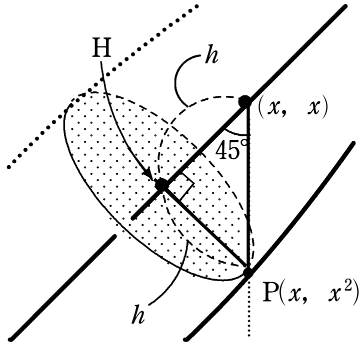
$$\sqrt{2}\,h=x-x^2$$

$$\therefore\quad h=\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}$$



また　$t=\sqrt{2}\,x-h=\dfrac{x+x^2}{\sqrt{2}}$

t	$0\longrightarrow\sqrt{2}$
x	$0\longrightarrow 1$



$\dfrac{x+x^2}{\sqrt{2}}=0\quad\therefore\quad x=0$

$\dfrac{x+x^2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$x+x^2=2$

$x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0$

$x>0$ より $x=1$

x で微分して　$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1+2x}{\sqrt{2}}$

$$\therefore\quad dt=\frac{1+2x}{\sqrt{2}}\,dx$$

よって　$V=\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} h^2\,dt$

$$=\pi\int_0^1 \frac{(x-x^2)^2}{2}\cdot\frac{1+2x}{\sqrt{2}}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1 (x^2-3x^4+2x^5)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^5}{5}+\frac{x^6}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{60}$$

練習４２）次の曲線と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=x^2-2x$

(2)　$y=\sin x$　$(0\leqq x\leqq \pi)$

練習４３）$a>0$，$b>0$ とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

練習４４） 次の曲線と直線で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

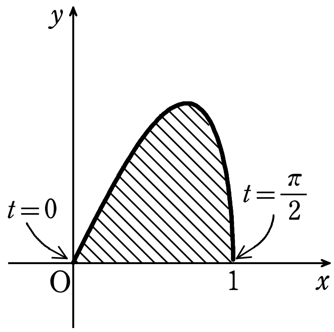
(1)　$y=4-x^2$，$y=1$

(2)　$y=1-\sqrt{x}$，x 軸，y 軸

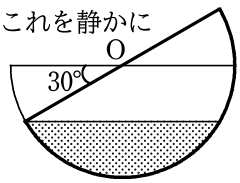
練習４５） 放物線 $y=4x-x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

練習４６） 次の曲線と x 軸で囲まれた部分が，
x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$x=\sin t$，$y=\sin 2t$　$\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$



章末問題１３） 水を満たした半径 $2a$ cm の半球形の容器がある。これを静かに 30° 傾けるとき，こぼれる水の量はどれだけか。



練習４２） 次の曲線と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに１回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=x^2-2x$　　　　(2)　$y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$

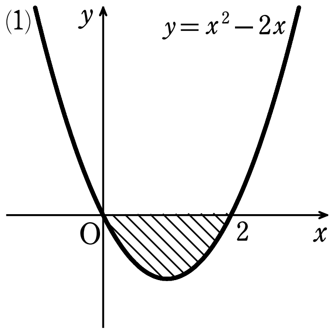
(解説)

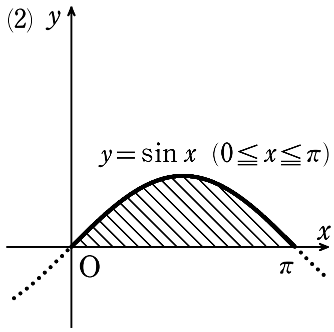
(1)　$V=\pi\int_0^2 (x^2-2x)^2 dx=\pi\int_0^2 (x^4-4x^3+4x^2)dx$

$=\pi\left[\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16}{15}\pi$

(2)　$V=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}$





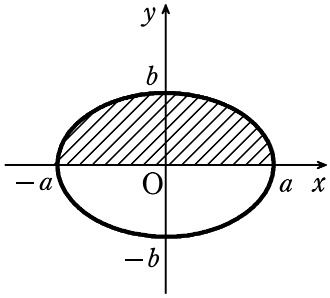
練習４３） $a>0$，$b>0$ とする。楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形が x 軸の周りに１回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(解説)

$V=\pi\int_{-a}^{a} y^2 dx$

$=\pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi b^2\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$

$=2\pi b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$



積分法とその応用【体積】 練習問題

練習44） 次の曲線と直線で囲まれた部分が，y 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

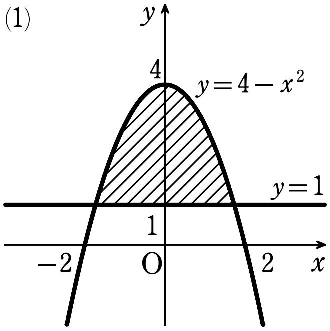
(1)　$y=4-x^2$，$y=1$　　　　(2)　$y=1-\sqrt{x}$，x 軸，y 軸

(解説)

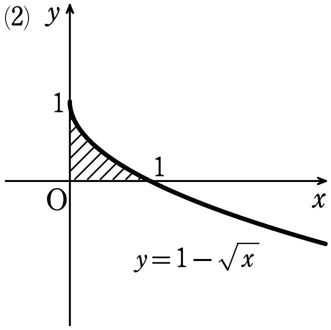
(1)　$V=\pi\int_1^4 x^2 dy=\pi\int_1^4 (4-y)dy=\pi\left[4y-\frac{y^2}{2}\right]_1^4=\frac{9}{2}\pi$

(2)　$V=\pi\int_0^1 x^2 dy=\pi\int_0^1 (1-y)^4 dy=\pi\left[-\frac{1}{5}(1-y)^5\right]_0^1=\frac{\pi}{5}$

(1)



(2)



練習45） 放物線 $y=4x-x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(解説)

放物線と直線の共有点の x 座標は，方程式

$4x-x^2=x$ を解いて

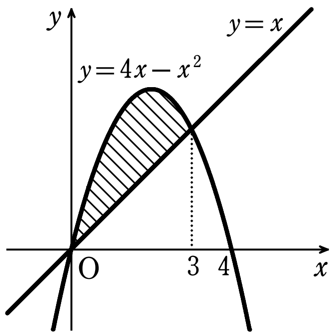
$x=0,\ 3$

よって

$$V=\pi\int_0^3 (4x-x^2)^2 dx-\pi\int_0^3 x^2 dx$$

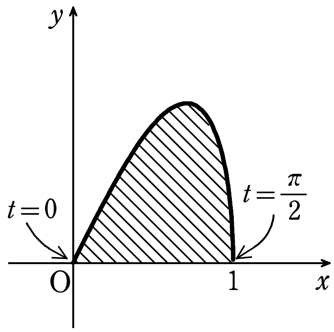
$$=\pi\int_0^3 (x^4-8x^3+15x^2)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}-2x^4+5x^3\right]_0^3=\frac{108}{5}\pi$$



練習４６） 次の曲線と x 軸で囲まれた部分が，
x 軸の周りに１回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$x=\sin t$，$y=\sin 2t$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$



(解説)

$$V=\pi\int_0^1 y^2dx,\quad dx=\cos t\,dt$$

x と t の対応は右のようになる。よって，置換積分法により

x	$0\longrightarrow 1$
t	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$

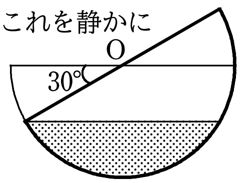
$$V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t)^2(\cos t)dt$$

$(\sin 2t)^2=4\sin^2t\cos^2t=4\sin^2t(1-\sin^2t)=4(\sin^2t-\sin^4t)$ であるから

$$V=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2t-\sin^4t)(\cos t)dt$$

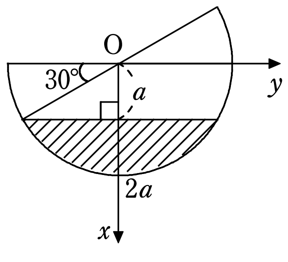
$$=4\pi\left[\frac{1}{3}\sin^3t-\frac{1}{5}\sin^5t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{15}\pi$$

章末問題１３） 水を満たした半径 $2a$ cm の半球形の容器がある。これを静かに
30° 傾けるとき，こぼれる水の量はどれだけか。



(解説)

右の図のように x 軸，y 軸をとると，$a\leqq x\leqq 2a$ の
部分が残る水の部分，$0\leqq x\leqq a$ の部分がこぼれる
水の部分になる。
こぼれる水の量 V は，$0\leqq x\leqq a$ の範囲において，
半円 $y=\sqrt{(2a)^2-x^2}$ と x 軸および２直線 $x=0$，
$x=a$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに１回転して
できる回転体の体積である。



よって　$V=\pi\displaystyle\int_0^a\{(2a)^2-x^2\}dx=\pi\left[4a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{11}{3}\pi a^3$

したがって，こぼれる水の量は $\dfrac{11}{3}\pi a^3$ cm^3