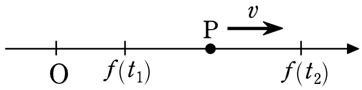
積分法とその応用【曲線の長さと道のり】　p.244～250

□速度と位置・道のり

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標を $x=F(t)$，速度を $v=f(t)$ とすると，微分法で学んだように次が成り立つ。



$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)\ \text{すなわち}\ \ f(t)=\int v\,dt$$

$t=a$ から $t=b$ までの点 P の位置の変化量は $f(t_2)-f(t_1)$ であるから

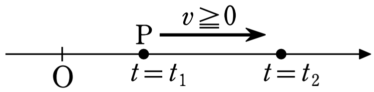
$$\int_{t_1}^{t_2} v\,dt=\int_{t_1}^{t_2} f'(t)\,dt=\Big[f(t)\Big]_{t_1}^{t_2}=f(t_2)-f(t_1)$$

となる。これより　$x=f(t_2)=f(t_1)+\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v\,dt$

瞬間的に進む量を
進んだ時間分**積み重ねる**(**積分**)

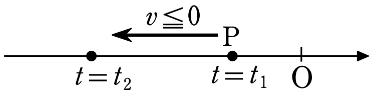
また時刻 t_1 から t_2 までに P が通過する総距離，すなわち **道のり** を s とする。

$t_1\leqq t\leqq t_2$ で常に $v\geqq 0$ ならば



$$s=\int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

$t_1\leqq t\leqq t_2$ で常に $v\leqq 0$ ならば



$$s=\int_{t_1}^{t_2} (-v)\,dt$$

「道のり」なので量は減らない

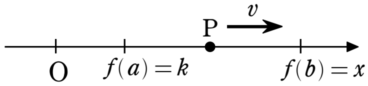
よって $t=t_1$ から $t=t_2$ までの点 P の 道のり は $|v|$ の定積分 $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}|v|\,dt$ で表される。

また、位置の変化量 $f(t_2)-f(t_1)$ と道のりが一致するのは，常に $f(t)\geqq 0$ である場合に限る。

以上のことをまとめると，次のようになる。

速度と位置

数直線上を運動する点 P の速度を $v=f(t)$ とし，$t=a$ のときの P の座標を k とする。



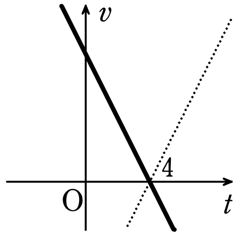
1　$t=b$ における P の**座標（位置）** x は　$x=k+\displaystyle\int_a^b v\,dt=k+\int_a^b f(t)\,dt$

2　$t=a$ から $t=b$ までの P の**位置の変化量** s は　$s=\displaystyle\int_a^b v\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$

3　$t=a$ から $t=b$ までの P の**道のり** l は　$l=\displaystyle\int_a^b |v|\,dt=\int_a^b |f(t)|\,dt$

積分法とその応用【曲線の長さと道のり】 p.244～250

例） 数直線上を運動する点Pの時刻 t における速度が $v=8-2t$ で表されているとする。



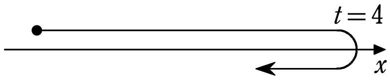
$t=0$ から $t=4$ までは $v>0$，このときの点Pの位置の変化は

$$\int_0^4(8-2t)dt=\Big[8t-t^2\Big]_0^4=(32-16)-0=16$$

$t=4$ から $t=6$ までは $v<0$，このときの点Pの位置の変化は

$$\int_4^6(8-2t)dt=\Big[8t-t^2\Big]_4^6=(48-36)-(32-16)$$

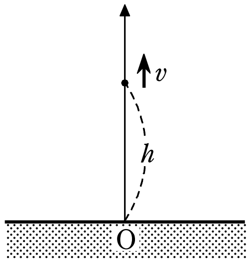
$$=12-16=-4$$



よって　$16-(-4)=16+4=20$

例１２） 30 m/s の速さで地上から真上に打ち上げられた物体の t 秒後の速度 v m/s は，$v=30-9.8t$ で与えられるという。ただし，$0\leqq t\leqq 6$ である。

打ち上げられてから2秒後における物体の高さ h m は

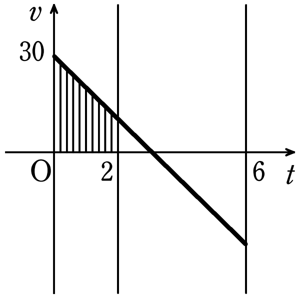


$$h=\int_0^2(30-9.8t)dt$$

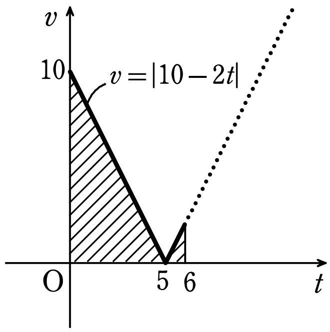
$$=\Big[30t-4.9t^2\Big]_0^2$$

$$=60-19.6$$

$$=40.4 \quad \text{(m)}$$ 終



例１３） 数直線上を運動する点Pの時刻 t における速度 v が，$v=10-2t$ $(0\leqq t\leqq 6)$ で与えられるとき，$t=0$ から $t=6$ までにPが通過する道のり s は



$$s=\int_0^6|10-2t|dt$$

$$=\int_0^5(10-2t)dt+\int_5^6(-10+2t)dt$$

$$=\Big[10t-t^2\Big]_0^5+\Big[-10t+t^2\Big]_5^6$$

$$=(25-0)+\{-24-(-25)\}$$

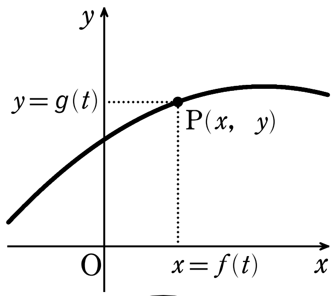
$$=26$$ 終

＜補足＞ 例１３において，道のり s は斜線部分の面積の和に等しい。

積分法とその応用【曲線の長さと道のり】　p.244～250

□座標平面上を運動する点と道のり

座標平面上を運動する点 P が通過する道のりについて考えてみよう。



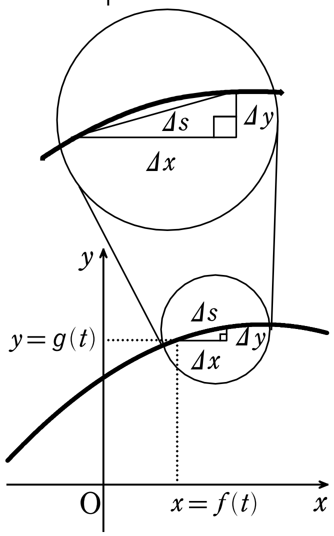
点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ を

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

とする。いま，時刻 t_1 から t までに P が通過する道のりを t の関数とみて，$s(t)$ で表す。また，t の増分 Δt に対する

$$s(t),\quad x=f(t),\quad y=g(t)$$

の増分を，それぞれ Δs，Δx，Δy とする。



$\Delta t>0$ で Δt が十分小さいときは

$$\Delta s \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

直角三角形が小さくなればなるほど、斜辺と曲線の差が小さくなる

と考えられるから，Δtで割ると

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \fallingdotseq \frac{1}{\Delta t}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2\cdot(\Delta x^2+\Delta y^2)}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \fallingdotseq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

である。$\Delta t<0$ のときも同様である。

導関数の定義

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ここで，$\Delta t \longrightarrow 0$ のときの極限を考えると，次が成り立つ。

$$s'(t)=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

時刻 t における P の速度 $\vec{v}$ は$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ であるので $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$ であるから，

上の結果から，$s'(t)=\left|\vec{v}\right|$ が成り立つ。

以上から，次のことが成り立つ。

座標平面上を運動する点と道のり

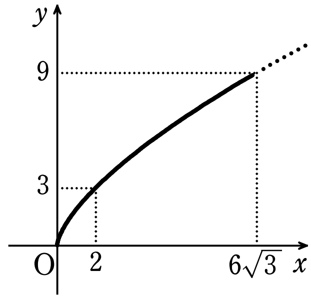
座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における x 座標，y 座標が t の関数で表されるとき，時刻 t_1 から t_2 までに P が通過する道のり s は

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\left|\vec{v}\right|\,dt$$

積分法とその応用【曲線の長さと道のり】　p.244～250

例題１７） 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x=2t^3$，$y=3t^2$ で表されるとき，$t=0$ から $t=\sqrt{3}$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

解答　$\dfrac{dx}{dt}=6t^2$，$\dfrac{dy}{dt}=6t$ であるから



$$s=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(6t^2)^2+(6t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\sqrt{3}}6t\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$t^2+1=u$ とおくと　$2t\,dt=du$
t と u の対応は右のようになる。

t	$0 \to \sqrt{3}$
u	$1 \to 4$

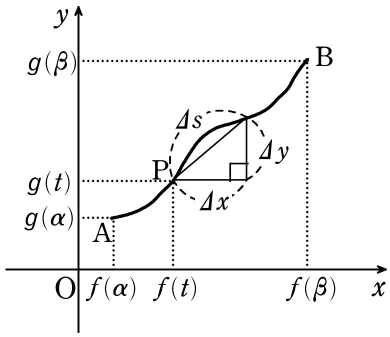
よって　$s=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}6t\sqrt{t^2+1}\,dt$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}3\sqrt{t^2+1}\cdot 2tdt=\int_1^4 3\sqrt{u}\,du=\Big[2u\sqrt{u}\Big]_1^4=14$$

□媒介変数表示された曲線の長さ

曲線の方程式が媒介変数 t を用いて $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(\alpha\leqq t\leqq\beta)$ と表され，$f(t)$，$g(t)$ の導関数はともに連続であるとき，この曲線の長さ L を定積分で表してみよう。

$A(f(\alpha),\ g(\alpha))$，$B(f(\beta),\ g(\beta))$ とし，点 A から点 $P(f(t),\ g(t))$ までの曲線の長さを，t の関数と考えて，$s(t)$ で表す。また，t の増分 Δt に対する $s(t)$，$f(t)$，$g(t)$ の増分を，それぞれ Δs，Δx，Δy とすると，



$|\Delta t|$ が十分小さいとき

$$|\Delta s|\fallingdotseq\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\quad\cdots\cdots ①$$

と考えてよい。

点 P が曲線上を A から B に向かって動くとき，$s(t)$ は単調に増加する t の関数で，Δt と Δs は同符号である。

よって，① から

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}\fallingdotseq\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\quad\cdots\cdots ②$$

$\varDelta t \longrightarrow 0$ のとき，② の両辺の差は 0 に近づくから

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$$

導関数の定義

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$$

よって，$s(t)$ は t の関数 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$ の不定積分の 1 つで

$$\int\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt=s(t)$$ であるから

$$\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt=\Big[s(t)\Big]_\alpha^\beta=s(\beta)-s(\alpha)$$

ここで，$s(\alpha)=0$，$s(\beta)=L$ であるから，次のことが成り立つ。

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

α までだと長さ 0

β までだと長さ全部

以上の結果をまとめると，次のようになる。

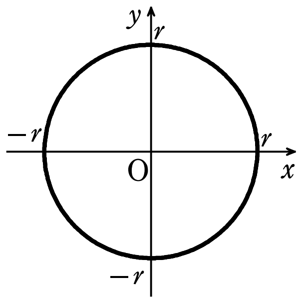
媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(\alpha\leqq t\leqq\beta)$ の長さ L は

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

例１４） 次の曲線の長さ L を求める。ただし，$r>0$ とする。

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t\quad(0\leqq t\leqq 2\pi)$$



$\dfrac{dx}{dt}=-r\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=r\cos t$ であるから

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt\\&=\int_0^{2\pi}r\,dt\\&=r\int_0^{2\pi}dt\\&=r\Big[t\Big]_0^{2\pi}\\&=2\pi r\end{aligned}$$

相互関係

t の関数についての積分なので r は外へ

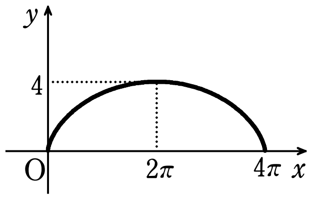
終

例１４ の曲線は，半径 r の円である。例 14 の計算で，半径 r の円の周の長さが，$2\pi r$ になることが示された。

積分法とその応用【曲線の長さと道のり】 p.244～250

例題１８） 次のサイクロイドの長さ L を求めよ。

$x=2(t-\sin t)$，$y=2(1-\cos t)$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$



解答 $\dfrac{dx}{dt}=2(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt}=2\sin t$ であるから

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

ルートの中のみをまず計算

$$=\{2(1-\cos t)\}^2+(2\sin t)^2$$
$$=4(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)$$

相互関係

$$=4(1-2\cos t+1)$$
$$=4(2-2\cos t)$$
$$=8(1-\cos t)$$
$$=16\sin^2\frac{t}{2}$$
$$=\left(4\sin\frac{t}{2}\right)^2$$

半角の公式 $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$ より

１６倍して $16\sin^2\dfrac{\theta}{2}=8(1-\cos\theta)$

$0\leqq t\leqq 2\pi$ のとき，$\sin\dfrac{t}{2}\geqq 0$ であるから

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(4\sin\frac{t}{2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}4\sin\frac{t}{2}\,dt$$
$$=4\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$
$$=16$$

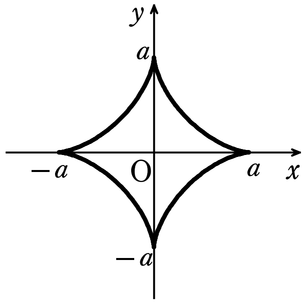
$a>0$ とする。θ を媒介変数として，媒介変数表示

$x=a\cos^3\theta$，$y=a\sin^3\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

の表す曲線は，右の図のようになる。

この曲線を **アステロイド** という。この曲線は

x 軸および y 軸に関して対称である。



積分法とその応用【曲線の長さと道のり】 p.244〜250

□曲線 $y=f(x)$（陽関数）の長さ

曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ は，

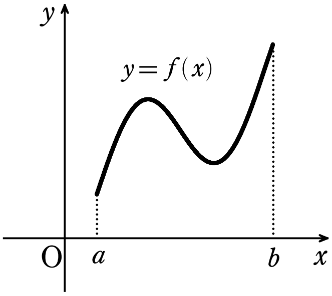
媒介変数 t を用いて

$x=t$，$y=f(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$

と表される。

$\dfrac{dx}{dt}=1$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=f'(x)$

であるから，次のことが成り立つ。

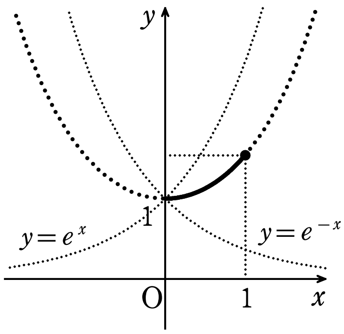


曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ L は

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

例題１９） 曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の長さ L を求めよ。



解答　$y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ であるから

$$1+y'^2=1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$$

$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$ であるから

$$L=\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

＜注意＞　$a>0$ とする。$y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ で表される曲線を **懸垂線** または **カテナリー** という。

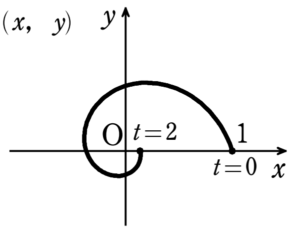
しなやかな糸などが自身の重さで垂れ下がったときにできる形である。

積分法とその応用【曲線の長さと道のり】　練習問題

練習４７） 数直線上を運動する点 P の速度が，時刻 t の関数として $v=4-2t$ で与えられている。
$t=0$ における P の座標が 2 であるとき，$t=3$ のときの P の座標を求めよ。

練習４８） 数直線上を運動する点 P があり，時刻 t における P の速度は $v=\sin 2t$ であるとする。
$t=0$ から $t=\pi$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

練習４９） 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x=e^{-t}\cos \pi t$，$y=e^{-t}\sin \pi t$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までに P が通過する道のり s を求めよ。



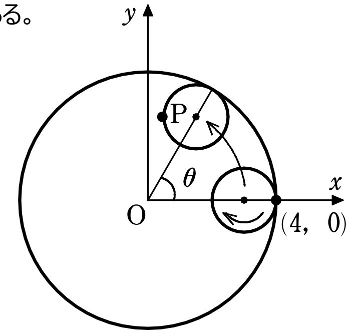
積分法とその応用【曲線の長さと道のり】　練習問題

練習５０） 次のアステロイドの長さ L を求めよ。

$$x=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

練習５１） 曲線 $y=x\sqrt{x}$ $(0 \leqq x \leqq 5)$ の長さ L を求めよ。。

積分法とその応用【曲線の長さと道のり】　練習問題



入試問題） xy 平面の原点 O を中心とする半径 4 の円 E がある。半径 1 の円 C が，内部から E に接しながらすべることなく転がって反時計回りに 1 周する。このとき，円 C の周上に固定された点 P の軌跡を考える。ただし，初めに点 P は点 (4，0) の位置にあるものとする。

(1)　図のように，x 軸と円 C の中心のなす角度が θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ となったときの点 P の座標 $(x,\ y)$ を，θ を用いて表せ。

(2)　点 P の軌跡の長さを求めよ。

積分法とその応用【曲線の長さと道のり】　練習問題

練習４７） 数直線上を運動する点Ｐの速度が，時刻 t の関数として $v=4-2t$ で与えられている。
$t=0$ におけるＰの座標が 2 であるとき，$t=3$ のときのＰの座標を求めよ。

(解説)
$t=3$ のときのＰの x 座標は

$$x=2+\int_0^3(4-2t)dt=2+\Big[4t-t^2\Big]_0^3=2+(12-9)=5$$

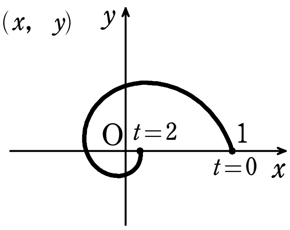
練習４８） 数直線上を運動する点Ｐがあり，時刻 t におけるＰの速度は $v=\sin 2t$ であるとする。
$t=0$ から $t=\pi$ までにＰが通過する道のり s を求めよ。

(解説)

$$s=\int_0^\pi|\sin 2t|dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi(-\sin 2t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2$$

練習４９） 座標平面上を運動する点Ｐの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x=e^{-t}\cos\pi t$，$y=e^{-t}\sin\pi t$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までにＰが通過する道のり s を求めよ。



(解説)

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}(\cos\pi t+\pi\sin\pi t),\quad \frac{dy}{dt}=-e^{-t}(\sin\pi t-\pi\cos\pi t)$$

であるから

$$s=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^2\sqrt{e^{-2t}\{\cos^2\pi t+\sin^2\pi t+\pi^2(\sin^2\pi t+\cos^2\pi t)\}}\,dt$$

$$=\sqrt{1+\pi^2}\int_0^2 e^{-t}dt=\sqrt{1+\pi^2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^2$$

$$=\sqrt{1+\pi^2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$$

積分法とその応用【曲線の長さと道のり】　練習問題

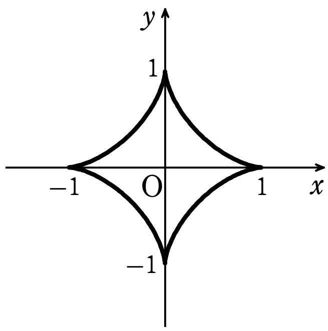
練習５０） 次のアステロイドの長さ L を求めよ。

$$x=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t\quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

(解説)

$$\frac{dx}{dt}=3\cos^2 t(-\sin t)=-3\sin t\cos^2 t,\quad \frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$$

また，アステロイドは x 軸，y 軸に関して対称であるから



$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3\sin t\cos^2 t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ では $\sin t\geqq 0$，$\cos t\geqq 0$ であるから

$$L=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=6\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6$$

練習５１） 曲線 $y=x\sqrt{x}\ (0\leqq x\leqq 5)$ の長さ L を求めよ。。

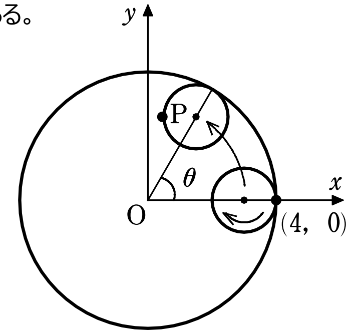
(解説)

$y'=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ であるから　　$1+y'^2=1+\dfrac{9}{4}x$

よって　　$L=\displaystyle\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5$

$$=\frac{8}{27}\left\{\left(\frac{7}{2}\right)^3-1\right\}=\frac{335}{27}$$

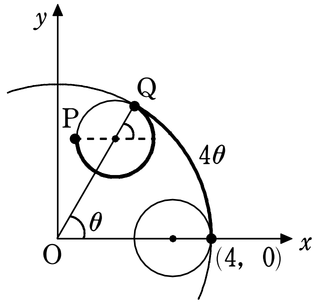
入試問題） xy 平面の原点 O を中心とする半径 4 の円 E がある。半径 1 の円 C が，内部から E に接しながらすべることなく転がって反時計回りに 1 周する。このとき，円 C の周上に固定された点 P の軌跡を考える。ただし，初めに点 P は点 $(4,\ 0)$ の位置にあるものとする。



(1)　図のように，x 軸と円 C の中心のなす角度が θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ となったときの点 P の座標 $(x,\ y)$ を，θ を用いて表せ。

(2)　点 P の軌跡の長さを求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$ (1)　円 C の中心を O′，円 C と円 E の接点を Q とおくと，$\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}=4\theta$ であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$$
$$=(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)+(\cos(\theta-4\theta),\ \sin(\theta-4\theta))$$
$$=(3\cos\theta+\cos 3\theta,\ 3\sin\theta-\sin 3\theta)$$

よって　　P$(3\cos\theta+\cos 3\theta,\ 3\sin\theta-\sin 3\theta)$

(2)　$x=3\cos\theta+\cos 3\theta$，$y=3\sin\theta-\sin 3\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=-3(\sin\theta+\sin 3\theta),\quad \frac{dy}{d\theta}=3(\cos\theta-\cos 3\theta)$$

よって

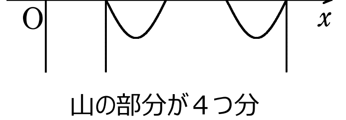
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=9\{(\sin\theta+\sin 3\theta)^2+(\cos\theta-\cos 3\theta)^2\}$$
$$=9\{(\sin^2\theta+2\sin 3\theta\sin\theta+\sin^2 3\theta)+(\cos^2\theta-2\cos 3\theta\cos\theta+\cos^2 3\theta)\}$$
$$=9\{2(1+\sin 3\theta\sin\theta-\cos 3\theta\cos\theta)\}$$
$$=18(1-\cos 4\theta)$$
$$=36\sin^2 2\theta$$

$\cos 3\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin\theta$
$=\cos(3\theta+\theta)=\cos 4\theta$

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ より
$2\sin^2 2\theta=1-\cos 4\theta$

したがって，点 P の軌跡の長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{36\sin^2 2\theta}\,d\theta$$
$$=6\int_0^{2\pi}|\sin 2\theta|\,d\theta$$
$$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta$$
$$=24\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-12(-1-1)$$
$$=24$$



山の部分が４つ分

【北海道大学　2005】