積分法とその応用【置換積分法】　p.206～209

□$f(ax+b)$ の不定積分～「□が x だったら良いのにな」の□が１次式のとき

a，b は定数とする。関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を利用して，合成関数 $f(ax+b)$ の不定積分を求めよう。

$u=ax+b$ とすると $\dfrac{d}{du}F(u)=f(u)$ であるから，合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}F(ax+b)=\frac{d}{du}F(u)\cdot\underline{\underline{\frac{d}{dx}(ax+b)}}$$

置き換えの微分

$$=af(ax+b)$$

両辺を積分すると

$$\frac{d}{dx}\int F(ax+b)dx=a\int f(ax+b)dx$$

$$\therefore\quad F(ax+b)+C_1=a\int f(ax+b)dx$$

よって，次の公式が得られる。

$f(ax+b)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$，$a\fallingdotseq 0$ とするとき

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

$ax+b$ が x だったら良いのに…

⇩

$(ax+b)'=a$ なので $\dfrac{1}{a}$ をかける

例５）(1) $\displaystyle\int\sqrt{3x+2}\,dx=\int(3x+2)^{\frac{1}{2}}dx$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(3x+2)^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$3x+2$ が x だったら良いのに…

⇩

$(3x+2)'=3$ なので $\dfrac{1}{3}$ をかける

$$=\frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$$

(2) $\displaystyle\int\cos 4x\,dx=\frac{1}{4}\sin 4x+C$

$4x$ が x だったら良いのに…

⇩

$(4x)'=4$ なので $\dfrac{1}{4}$ をかける

(3) $\displaystyle\int e^{1-2x}dx=\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-2x}+C$

$1-2x$ が x だったら良いのに…

⇩

$(1-2x)'=-2$ なので $\dfrac{1}{-2}$ をかける

積分法とその応用【置換積分法】　p.206～209

□置換積分法～積 ○×□$^{\triangle}$の形…○と□に関係性なし

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする。x が t の関数として $x=g(t)$ と表されるとき，$y=F(x)$ は t の関数でもある。$g(t)$ が微分可能であるとき

合成関数の微分法（置き換えたものの微分を掛ける）

$$\frac{dy}{dx}=F'(x)=f(x),\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t)$$

y を 2 通りの不定積分で表すと，次の **置換積分法** の公式が成り立つ。

置換積分法 (1)

1　$\displaystyle\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt$　　ただし，$x=g(t)$

$\displaystyle\int f(x)dx=\int f(g(t))\frac{dx}{dt}dt=\int f(g(t))g'(t)dt$と見ることもできる

$x=g(t)$ のとき $\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ である。

$\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ を**形式的に** $dx=g'(t)dt$ と書き表すと，上の公式 1 における式の変形が覚えやすい。

$\dfrac{dx}{dt}$ は 1 つの記号であるが、形式的（内容を問題気にしない）に分けて考えられるとする

$$\int f(\boxed{x})\,\boxed{dx}=\int f(\boxed{g(t)})\,\boxed{g'(t)dt}$$

x を $g(t)$，dx を $g'(t)dt$ におき換える。

例題 1 ）　不定積分 $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$ を求めよ。

解答　$\sqrt{x+1}=t$ とおくと　$x+1=t^2$　$x=t^2-1$　であるから　$\dfrac{dx}{dt}=2t$

$$\int \boxed{x}\,\boxed{\sqrt{x+1}}\,\boxed{dx}=\int \boxed{(t^2-1)}\cdot\boxed{t}\cdot\boxed{2tdt}$$

$dx=2tdt$

$$=2\int(t^4-t^2)dt=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C$$

$\dfrac{t^3}{15}$ でくくる

$$=\frac{2}{15}(3t^2-5)t^3+C=\frac{2}{15}\{3(x+1)-5\}(x+1)\sqrt{x+1}+C$$

$$=\frac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1}+C$$

$t^3=t^2\cdot t$ に注意して x の式にもどす

別解　$x+1=t$ とおくと　$x=t-1$　であるから　$\dfrac{dx}{dt}=1$

$$\int \boxed{x}\,\boxed{\sqrt{x+1}}\,\boxed{dx}=\int \boxed{(t-1)}\cdot\boxed{\sqrt{t}}\cdot\boxed{1dt}$$

$dx=1dt$

$$=\int\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

$t^{\frac{3}{2}}=t^{\frac{2}{2}}\cdot t^{\frac{1}{2}}$ に注意して x の式にもどす

$$=\frac{2}{15}\left(3t^{\frac{2}{2}}-5\right)t^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{15}\{3(x+1)-5\}(x+1)\sqrt{x+1}+C$$

$$=\frac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1}+C$$

積分法とその応用【置換積分法】　p.206～209

□ $f(g(x))g'(x)$ の置換積分法～積 ○×□$^{\triangle}$の形…○と□に関係性あり

□を微分すると
○になるとき
（似た形も可）

前ページの置換積分法 (1) の公式において，左辺と右辺を入れかえて，積分変数 t，x をそれぞれ x，u に変えると，次の公式が得られる。

置換積分法 (2)

2　$\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$　　ただし，$g(x)=u$

$g(x)=u$ のとき $g'(x)=\dfrac{du}{dx}$ である。$g'(x)=\dfrac{du}{dx}$ を**形式的に** $g'(x)dx=du$ と書き表すと，上の公式２における式の変形が覚えやすい。

$$\int f(\boxed{g(x)})\boxed{g'(x)dx}=\int f(\boxed{u})\boxed{du}$$

$g(x)$ を u，$g'(x)dx$ を du におき換える。

例題２）　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$(x^2+1)'=2x$

(2)　$\displaystyle\int \cos^2 x\sin x\,dx$

$(\cos x)'=-\sin x$

解答　(1)　$x^2+1=u$ とおき x で微分すると　$2x=\dfrac{du}{dx}$　　$\therefore xdx=\dfrac{1}{2}du$

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\sqrt{x^2+1}\cdot xdx$$
$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$$

(2)　$\cos x=u$ とおき x で微分すると　$-\sin x=\dfrac{du}{dx}$　　$\therefore$　$\sin x\,dx=(-1)\cdot du$

$$\int\cos^2 x\sin x\,dx=\int\cos^2 x\cdot\sin x\,dx$$
$$=-\int u^2du$$
$$=-\frac{u^3}{3}+C$$
$$=-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

積分法とその応用【置換積分法】　p.206～209

□$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分法～ $\dfrac{(\text{分母の微分})}{(\text{分母})}$ と見られるとき

公式２において，とくに $f(u)=\dfrac{1}{u}$ とすると

$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\int\frac{1}{u}du=\log|u|+C=\log|g(x)|+C$$

となる。すなわち，次の公式が成り立つ。

3　$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$$

例題３）　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{2x}{x^2-3}dx$　　$(x^2-3)'=2x$

解答 (1) $$\int\frac{2x}{x^2-3}dx=\int\frac{(x^2-3)'}{x^2-3}dx$$
$$=\log|x^2-3|+C$$

(2) $\displaystyle\int\tan x\,dx$

解答 (2) $$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$$　　$(\cos x)'=-\sin x$
$$=\int\frac{-(-\sin x)}{\cos x}dx$$
$$=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=-\log|\cos x|+C$$

練習４） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (3x+1)^4 dx$　　(2) $\displaystyle\int (4x-3)^{-3} dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+1}$　　(5) $\displaystyle\int \sin 2x\, dx$　　(6) $\displaystyle\int e^{3x-1} dx$

練習５） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

練習６） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$

練習７） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$

練習４） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(3x+1)^4dx$　(2) $\displaystyle\int(4x-3)^{-3}dx$　(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x+1}$　(5) $\displaystyle\int\sin 2x\,dx$　(6) $\displaystyle\int e^{3x-1}dx$

(解説)

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int(3x+1)^4dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(3x+1)^5+C=\frac{1}{15}(3x+1)^5+C$

(2) $\displaystyle\int(4x-3)^{-3}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-2}(4x-3)^{-2}+C=-\frac{1}{8}(4x-3)^{-2}+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}=\int(1-2x)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{-2}\cdot 2(1-2x)^{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{1-2x}+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x+1}=\frac{1}{2}\log|2x+1|+C$

(5) $\displaystyle\int\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}(-\cos 2x)+C=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

(6) $\displaystyle\int e^{3x-1}dx=\frac{1}{3}e^{3x-1}+C$

練習５） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$　(2) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

(解説)

C は積分定数とする。

(1) $\sqrt{2x-1}=t$ とおくと　$x=\dfrac{t^2+1}{2}$，$dx=tdt$

$$\int x\sqrt{2x-1}\,dx=\int\frac{t^2+1}{2}\cdot t\cdot tdt=\frac{1}{2}\int(t^4+t^2)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15}(3t^2+5)t^3+C$$
$$=\frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$$

(2) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと　$x=t^2-1$，$dx=2tdt$

$$\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{t^2-1}{t}\cdot 2tdt=2\int(t^2-1)dt$$
$$=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=\frac{2}{3}(t^2-3)t+C$$
$$=\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+C$$

練習６） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

解説

C は積分定数とする。

(1) $x^3+2=u$ とおくと　$x^2dx=\dfrac{1}{3}du$

$$\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx=\int\sqrt{x^3+2}\cdot x^2dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\sqrt{u}\,du=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3+2}+C$$

(2) $\sin x=u$ とおくと　$\cos x\,dx=du$

$$\int\sin^3 x\cos x\,dx=\int u^3du$$

$$=\frac{u^4}{4}+C=\frac{1}{4}\sin^4 x+C$$

(3) $\log x=u$ とおくと　$\dfrac{1}{x}dx=du$

$$\int\frac{\log x}{x}dx=\int udu$$

$$=\frac{u^2}{2}+C=\frac{1}{2}(\log x)^2+C$$

練習７） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$　　(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan x}$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2+x-1}dx=\int\frac{(x^2+x-1)'}{x^2+x-1}dx=\log|x^2+x-1|+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=\log(e^x+1)+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan x}=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{(\sin x)'}{\sin x}dx=\log|\sin x|+C$