

□部分積分法

積の導関数の公式 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ より, $f(x)g(x)$ は右辺の関数の原始関数である。

よって $\int \{f(x)g(x)\}' dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

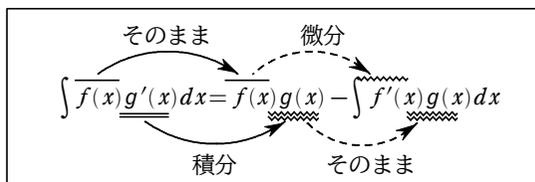
$$f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx = \int f(x)g'(x) dx$$

置換積分法により, 次の **部分積分法** の公式が成り立つ。

マイナス

部分積分法

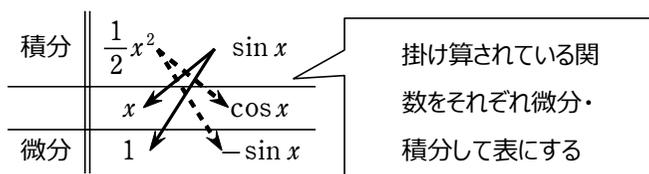
$$4 \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$



ポイント

1. 積分したい関数が「2つの関数の掛け算」である
2. 片方の関数が微分すると簡単な関数になる
(もう片方は積分しても余り複雑にならない関数だと嬉しい)

例題 4) 不定積分 $\int x \cos x dx$ を求めよ。



解答 $\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx$

$$= x \sin x - \int \sin x dx$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

シンプルな組合せの方に \int を付ける

□部分積分法（つづき）

ポイント

1. 積分したい関数が「2つの関数の掛け算」である
2. 片方の関数が微分すると簡単な関数になる
(もう片方は積分しても余り複雑にならない関数だと嬉しい)

応用例題 1) 不定積分 $\int \log x dx$ を求めよ。

$\log x = 1 \cdot \log x$ とみる	
-------------------------------	--

積分	x	?
	1	$\log x$
微分	0	$\frac{1}{x}$

掛け算されている関数をそれぞれ微分・積分して表にする

解答 $\int 1 \cdot \log x dx = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$

$= x \log x - \int dx$

$= x \log x - x + C$

シンプルな組合せの方に \int を付ける

応用例題 2) 不定積分 $\int x^2 e^x dx$ を求めよ。

積分	$\frac{1}{3}x^3$	e^x
	x^2	e^x
微分	$2x$	e^x

掛け算されている関数をそれぞれ微分・積分して表にする

解答 $\int x^2 e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx$

$= x^2 e^x - 2 \int x \cdot e^x dx$

$= x^2 e^x - 2 \left(x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx \right) + C$

シンプルな組合せの方に \int を付ける

$\int x \cdot e^x dx$ を部分積分

$= x^2 e^x - 2(x \cdot e^x - e^x) + C$

$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$

$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C$

積分	$\frac{1}{2}x^2$	e^x
	x	e^x
微分	1	e^x

積分法とその応用【部分積分法】 練習問題

練習 8) 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x \sin x dx$

(2) $\int x e^{-x} dx$

練習 9) 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \log 2x dx$

(2) $\int \log x^2 dx$

(3) $\int x \log x dx$

練習 10) 不定積分 $\int (x^2 + 1)\sin x dx$ を求めよ。

積分法とその応用【部分積分法】 練習問題

練習8) 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x \sin x dx$

(2) $\int x e^{-x} dx$

解説

C は積分定数とする。

$$\begin{aligned} (1) \int x \sin x dx &= \int x(-\cos x)' dx \\ &= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

積分	$\frac{1}{2}x^2$	$-\cos x$
	x	$\sin x$
微分	1	$\cos x$

$$\begin{aligned} (2) \int x e^{-x} dx &= \int x(-e^{-x})' dx \\ &= x(-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx \\ &= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx \\ &= -x e^{-x} - e^{-x} + C \\ &= -(x+1)e^{-x} + C \end{aligned}$$

積分	$\frac{1}{2}x^2$	$-e^{-x}$
	x	e^{-x}
微分	1	$-e^{-x}$

練習9) 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \log 2x dx$

(2) $\int \log x^2 dx$

(3) $\int x \log x dx$

解説

C は積分定数とする。

$$\begin{aligned} (1) \int \log 2x dx &= \int 1 \cdot (\log 2x) dx \\ &= x \cdot (\log 2x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \log 2x - \int 1 dx \\ &= x \log 2x - x + C \end{aligned}$$

積分	x	?
	1	$\log 2x$
微分	0	$\frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} (2) \int \log x^2 dx &= \int 1 \cdot (\log x^2) dx \\ &= x \cdot (\log x^2) - \int x \cdot \frac{2}{x} dx \\ &= x \log x^2 - \int 2 dx \\ &= x \log x^2 - 2x + C \end{aligned}$$

積分	x	?
	1	$\log x^2$
微分	0	$\frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

積分法とその応用【部分積分法】 練習問題

$$\begin{aligned}
 (3) \int x \log x dx &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + C
 \end{aligned}$$

積分	$\frac{1}{2}x^2$?
	x	$\log x$
微分	1	$\frac{1}{x}$

練習10) 不定積分 $\int (x^2+1)\sin x dx$ を求めよ。

解説

$$\begin{aligned}
 \int (x^2+1)\sin x dx &= (x^2+1)(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) dx \\
 &= -(x^2+1)\cos x + 2 \int x \cos x dx \\
 &= -(x^2+1)\cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) \\
 &= -(x^2+1)\cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C \\
 &= -(x^2+1)\cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C \\
 &= (1-x^2)\cos x + 2x \sin x + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

積分	$\frac{1}{3}x^3 + x$	$-\cos x$
	$x^2 + 1$	$\sin x$
微分	2x	$\cos x$

積分	$\frac{1}{2}x^2$	$\sin x$
	x	$\cos x$
微分	1	$-\sin x$