積分法とその応用【いろいろな関数の不定積分】　p.212～213

□分数関数の不定積分

① 分母が単項式 $\Longrightarrow$ 分数式は整式にして単項式ごとにみる（以前のプリント）

② $\dfrac{\text{分母の微分}}{\text{分母}}$ $\Longrightarrow$ 置換積分法で $\log|\text{分母}|$ （以前のプリント）

③ 分母が多項式で（分母の次数）＜（分子の次数）$\Longrightarrow$ $A=B\times Q+R$

④ 分母が因数分解可能 $\Longrightarrow$ 部分分数分解

例題７） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2+3}{x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{x-3}{x^2-3x+2}dx$

解答 (1) $\dfrac{x^2+3}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x-1)+4}{x+1}$

$$=\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}+\frac{4}{x+1}=x-1+\frac{4}{x+1}$$

$$\begin{array}{r|l} & x\ \ -1 \\ x+1 & x^2 \qquad +3 \\ & x^2+x \\ \hline & -x+3 \\ & -x-1 \\ \hline & 4 \end{array}$$

または

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & 0 & 3 \\ & & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{4} \end{array}$$

であるから

$$\int\frac{x^2+3}{x+1}dx=\int\left(x-1+\boxed{\frac{4}{x+1}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-x+4\log|x+1|+C$$

$x+1$ が x だったらいいのにな

$\Rightarrow (x+1)'=1$ より $\times\dfrac{1}{1}$

(2) $\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}=\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}$ であるから

分子が１なら差を取ってでＯＫ

$\dfrac{1}{\text{大}-\text{小}}\left(\dfrac{1}{\text{小}}-\dfrac{1}{\text{大}}\right)$

$\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$ とおくと

両辺に $(x-1)(x-2)$ をかけて　$x-3=(x-2)a+(x-1)b$

x について整理すると　$x-3=(a+b)x-2a-b$

x の恒等式なので　$a+b=1$，$-2a-b=-3$

$$\begin{array}{rrl} & a+b= & 1 \\ +) & -2a-b= & -3 \\ \hline & -a\qquad = & -2 \end{array}$$

これを解くと　$a=2$，$b=-1$

よって　$\displaystyle\int\frac{x-3}{x^2-3x+2}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right)dx$

$$=2\log|x-1|-\log|x-2|+C$$

$$=\log|x-1|^2-\log|x-2|+C$$

$$=\log\frac{(x-1)^2}{|x-2|}+C$$

$x-1$，$x-2$ がそれぞれ

x だったらいいのにな

$|x-1|^2=(x-1)^2$

$\log M-\log N=\log\dfrac{M}{N}$

積分法とその応用【いろいろな関数の不定積分】 p.212～213

□三角関数に関する不定積分

三角関数に関する積分では，半角の公式や倍角の公式がよく使われる。

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

また，三角関数の積を和や差の形にするとき，積和の公式が使われる。

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

例題６） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int\sin^2 x\,dx$　　(2) $\int\sin 3x\cos x\,dx$

解答 (1)

$$\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

$\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$

と分けても良い

(2)

$$\int\sin 3x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 4x+\sin 2x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$
$$=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

$4x$，$2x$ がそれぞれ

x だったらいいのにな

$\sin 3x\cos x$

$$=\frac{1}{2}\{\sin(3x+x)+\sin(3x-x)\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)$$

積分法とその応用【いろいろな関数の不定積分】　p.212～213

例題）　不定積分 $\int \sin^3 x\,dx$ を求めよ。

○相互関係→置換積分法

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)\cdot \sin x\,dx$$
$$= \int \sin x\,dx - \int \cos^2 x \sin x\,dx$$

$\cos x = u$ とおくと　$-\sin x = \dfrac{du}{dx}$

$$\therefore\ \ \sin x\,dx = (-1)du$$

$$\int \sin^3 x\,dx = -\cos x - \int u^2\cdot(-1)du$$
$$= -\cos x + \int u^2 du$$
$$= -\cos x + \frac{1}{3}u^3 + C$$
$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$ より

$$\frac{1}{12}(4\cos^3 x - 3\cos x) - \frac{3}{4}\cos x + C$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{4}\cos x + C$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

◎困ったら次数を下げて

　倍角の関係性にもっていくと良い

◎ $(\sin x)^k \cos x$ や $(\cos x)^k \sin x$ など

　１次の因数があるなら置換積分の形

○半角の公式→積和

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx$$
$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cdot \sin x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin x \cos 2x\,dx$$

$$\sin x\cos 2x = \frac{1}{2}\{\sin 3x + \sin(-x)\}$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$$ なので

$$\int \sin^3 x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin x\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)dx$$
$$= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{4}\int (\sin 3x - \sin x)dx$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right) + C$$
$$= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos x + C$$
$$= \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C$$

○３倍角

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ なので

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)dx$$
$$= \frac{3}{4}\int \sin x\,dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\,dx$$
$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cos 3x + C$$
$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

積分法とその応用【いろいろな関数の不定積分】 p.212～213

例題） 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ を求めよ。

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx$$

ここで　$\sin x = u$ とおくと　$\cos x = \dfrac{du}{dx}$ となるから　$\cos x\, dx = du$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx \\
&= \int \frac{1}{1-\sin^2 x} \cdot \cos x\, dx \\
&= \int \frac{1}{1-u^2} du \\
&= \int \frac{-1}{u^2-1} du \\
&= -\int \frac{1}{(u+1)(u-1)} du \\
&= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du \\
&= -\frac{1}{2}(\log|u-1| - \log|u+1|) + C \\
&= \frac{1}{2}(-\log|u-1| + \log|u+1|) + C \\
&= \frac{1}{2}(\log|u+1| - \log|u-1|) + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{|\sin x+1|}{|\sin x-1|} + C \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{\sin x+1}{-(\sin x-1)} + C \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C
\end{aligned}$$

分子が１なら差を取ってでＯＫ

$$\frac{1}{大-小}\left(\frac{1}{小} - \frac{1}{大}\right)$$

$$\frac{1}{(u+1)-(u-1)}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)$$

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より

$0 \leqq \sin x + 1 \leqq 2$ （中身正）

$-1 \leqq \sin x - 1 \leqq 0$ （中身負）

練習１２） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x+2}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{2x-1}dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+x-2}dx$

練習１３） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^2 3x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \cos 3x\cos 2x\,dx$　　(5) $\displaystyle\int \sin x\sin 3x\,dx$

問題５） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-1}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$ (3) $\displaystyle\int \frac{\log(x+1)}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int \sin 3x \cos 2x\,dx$ (5) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$

入試問題） 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x^2-2x+9}{(x^2+3)(x-1)^2}dx$ を計算せよ．

【小樽商科大学】

練習１２）次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x+2}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{4x^2}{2x-1}dx$　　(3) $\displaystyle\int\frac{3}{x^2+x-2}dx$

(解説)

C は積分定数とする。

(1) $\dfrac{x^2-1}{x+2}=x-2+\dfrac{3}{x+2}$ であるから

$$\int\frac{x^2-1}{x+2}dx=\int\left(x-2+\frac{3}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{x^2}{2}-2x+3\log|x+2|+C$$

(2) $\dfrac{4x^2}{2x-1}=2x+1+\dfrac{1}{2x-1}$ であるから

$$\int\frac{4x^2}{2x-1}dx=\int\left(2x+1+\frac{1}{2x-1}\right)dx$$
$$=x^2+x+\frac{1}{2}\log|2x-1|+C$$

(3) $\dfrac{3}{x^2+x-2}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+2}$ とする。

等式の両辺に $(x-1)(x+2)$ を掛けて

$$3=(a+b)x+(2a-b)$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$a+b=0,\ 2a-b=3$$

これを解いて　$a=1,\ b=-1$

したがって

$$\int\frac{3}{x^2+x-2}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\log|x-1|-\log|x+2|+C=\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$$

練習１３） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \cos^2 x\,dx$　(2) $\int \sin^2 3x\,dx$　(3) $\int \sin x\cos x\,dx$

(4) $\int \cos 3x\cos 2x\,dx$　(5) $\int \sin x\sin 3x\,dx$

(解説)

C は積分定数とする。

(1) $\int \cos^2 x\,dx = \int \dfrac{1+\cos 2x}{2}dx = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$

(2) $\int \sin^2 3x\,dx = \int \dfrac{1-\cos 6x}{2}dx = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{12}\sin 6x + C$

(3) $\int \sin x\cos x\,dx = \int \dfrac{\sin 2x}{2}dx = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right) + C = -\dfrac{1}{4}\cos 2x + C$

(4) $\int \cos 3x\cos 2x\,dx = \dfrac{1}{2}\int(\cos 5x + \cos x)dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\right) + C$$

$$= \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C$$

(5) $\int \sin x\sin 3x\,dx = -\dfrac{1}{2}\int(\cos 4x - \cos 2x)dx$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

$$= -\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

問題５） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$　　(3) $\displaystyle\int \frac{\log(x+1)}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int \sin 3x \cos 2x\, dx$　　(5) $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx$

(解説)

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\frac{x-3}{x^2-1}=\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}$ であるから

$$\int \frac{x-3}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=2\log|x+1|-\log|x-1|+C$$
$$=\log\frac{(x+1)^2}{|x-1|}+C$$

(2) $e^x=t$ とおくと　$e^x dx=dt$

$$\int \frac{dx}{e^x+1}=\int \frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx$$
$$=\int \frac{dt}{t(t+1)}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\log|t|-\log(t+1)+C$$
$$=x-\log(e^x+1)+C$$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log(x+1)}{x^2}dx=\int \log(x+1)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)' dx$

$$=-\frac{\log(x+1)}{x}+\int \frac{dx}{x(x+1)}$$
$$=-\frac{\log(x+1)}{x}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=-\frac{\log(x+1)}{x}+\log|x|-\log(x+1)+C$$
$$=-\frac{\log(x+1)}{x}+\log\frac{|x|}{x+1}+C$$

(4) $\displaystyle\int \sin 3x\cos 2x\, dx=\frac{1}{2}\int(\sin 5x+\sin x)dx$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x-\cos x\right)+C$$
$$=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+C$$

(5) $\displaystyle\cos^4 x=(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$

$$=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$$

よって

$$\int \cos^4 x\,dx=\int\left(\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}\right)dx$$
$$=\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x+C$$

入試問題） 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x^2-2x+9}{(x^2+3)(x-1)^2}dx$ を計算せよ．

【小樽商科大学】

(解説)

$\displaystyle\frac{x^2-2x+9}{(x^2+3)(x-1)^2}=\frac{ax+b}{x^2+3}+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{(x-1)^2}$ とおく．

分母を払って整理すると

$x^2-2x+9=(a+c)x^3+(-2a+b-c+d)x^2+(a-2b+3c)x+b-3c+3d$

これが x についての恒等式であるから

$$\begin{cases} a+c=0 & \cdots\cdots ① \\ -2a+b-c+d=1 & \cdots\cdots ② \\ a-2b+3c=-2 & \cdots\cdots ③ \\ b-3c+3d=9 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

①, ②, ③, ④ から $a=1,\ b=0,\ c=-1,\ d=2$

よって $\displaystyle\int\frac{x^2-2x+9}{(x^2+3)(x-1)^2}dx=\int\left\{\frac{x}{x^2+3}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right\}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+3}dx-\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\log(x^2+3)-\log|x-1|-\frac{2}{x-1}+C\ (C\text{は積分定数})$$