積分法とその応用【定積分】　p.215～217

□定積分

数学Ⅱで学んだように，関数 $f(x)$ の 定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は，次のように定義される。a をこの定積分の **下端**，b を **上端** という。

定積分

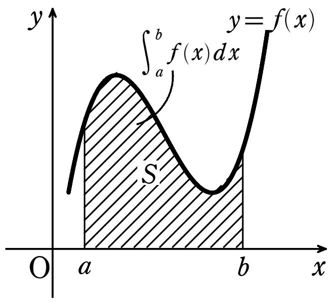
ある区間で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とし，

a，b をその区間に含まれる任意の値とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

上－下

定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を求めることを，$f(x)$ を a **から** b **まで積分する** という。区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x)\geqq 0$ のとき，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた右の図の斜線部分の面積 S を表す。



例１）　(1) $\int_1^3 \sqrt{x}\,dx=\int_1^3 x^{\frac{1}{2}}dx$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^3$$

$$=\frac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)$$

数Ⅱの定積分と同様

不定積分を［　］で囲う

（積分定数 C は不要）

(2) $\int_0^{\pi} 6\sin 3\theta\,d\theta=\left[6\cdot\frac{1}{3}\cdot(-\cos 3\theta)\right]_0^{\pi}$

$$=-2\Big[\cos 3\theta\Big]_0^{\pi}$$

$$=-2(\cos 3\pi-\cos 0)$$

$$=-2(-1-1)$$

$$=-2\cdot(-2)$$

$$=4$$

3θ が θ だったらいいのにな

積分法とその応用【定積分】　p.215～217

□定積分の基本性質

数学Ⅱで学んだように，定積分について，次のことが成り立つ。

定積分の性質

1　$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　ただし，k は定数

2 & 3　$\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

4　$\int_a^a f(x)dx=0$　線分の面積は０

5　$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$　上端下端ひっくり返すと符号も変わる

6　$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$　被積分関数が変わらなければつなげたり、ばらしたりしてもＯＫ

例７＋α） 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 \frac{3x-4}{x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx$　分母が単項なので分割する

$$=3\int_1^2\frac{dx}{x}-4\int_1^2 x^{-2}dx$$

$$=3\Big[\log|x|\Big]_1^2-4\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$=3(\log 2-\log 1)-4\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)-(-1)\right\}$$　符号注意

$$=3(\log 2-0)-4\left(\frac{1}{2}\right)=3\log 2-2$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 3x\sin 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\frac{1}{2}(\cos 5x-\cos x)\right\}dx$　積和の公式（加法定理から作る）

$$=-\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 5x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{5}\sin 5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}\sin\frac{5}{2}\pi-\frac{1}{5}\sin 0-\sin\frac{\pi}{2}+\sin 0\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\cdot 1-\frac{1}{5}\cdot 0-1+0\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{5}{5}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{2}{5}$$

(3) $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\left(\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right\}$$

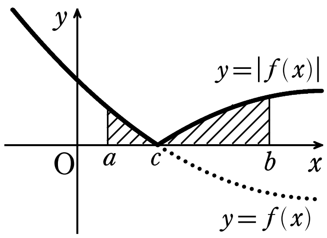
$$=\frac{1}{2}(\pi-0-0+0)=\frac{\pi}{2}$$

積分法とその応用【定積分】　p.215～217

□絶対値のついた関数の定積分

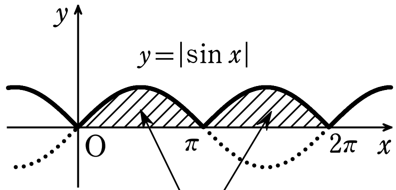
関数 $f(x)$ が　$a \leqq x \leqq c$ のとき　$f(x) \geqq 0$,　　$c \leqq x \leqq b$ のとき　$f(x) \leqq 0$　であるとする。このとき，絶対値のついた関数 $|f(x)|$ を a から b まで積分するには，次のように区間を分けて行う。

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b \{-f(x)\}dx$$



この定積分 $\int_a^b |f(x)|dx$ は，$y=|f(x)|$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を表している。

例題７）　定積分 $\int_0^{\frac{4}{3}\pi} |\sin x|dx$ を求めよ。



$\boxed{解答}$ $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき　$|\sin x| = \sin x$

$\pi \leqq x \leqq \frac{4}{3}\pi$ のとき　$|\sin x| = -\sin x$

よって

$$\int_0^{\frac{4}{3}\pi} |\sin x|dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi} (-\sin x)dx$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}$$

$$= (-\cos\pi + \cos 0) + \left(\cos\frac{4}{3}\pi - \cos\pi\right)$$

$$= (1+1) + \left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{5}{2}$$

0 から 2π までのときは

グラフの周期性により

$2\int_0^{\pi} \sin x\, dx$

$= 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$

$= 2(1+1)$

$= 4$

と見ることもできる

練習１６）(2)　定積分 $\int_{-1}^{2} |e^x - 1|dx$ を求めよ。

$-1 \leqq x \leqq 0$ のとき　$|e^x - 1| = 1 - e^x$

$0 \leqq x \leqq 2$ のとき　$|e^x - 1| = e^x - 1$

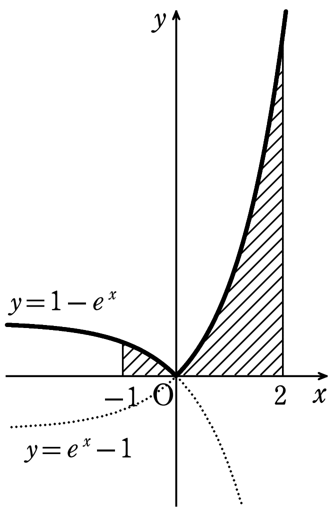
であるから

$$\int_{-1}^{2} |e^x - 1|dx = \int_{-1}^{0} (1-e^x)dx + \int_0^2 (e^x - 1)dx$$

$$= \Big[x - e^x\Big]_{-1}^{0} + \Big[e^x - x\Big]_0^2$$

$$= \left\{-1 - \left(-1 - \frac{1}{e}\right)\right\} + (e^2 - 2 - 1)$$

$$= e^2 + \frac{1}{e} - 3$$



積分法とその応用【定積分】 練習問題

練習１４） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta$　(3) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$　(4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2^x dx$

練習１５） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+1}\, dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3 dx$　(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (e^t - e^{-t}) dt$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x\, dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta\, d\theta$

練習１６） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^4 \left|\sqrt{x}-1\right| dx$

入試問題） 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$ の値を求めよ。

【東京電機大】

練習１４）次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta$　(3) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$　(4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2^x dx$

(解説)

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \left[\log|x|\right]_{-2}^{-1} = -\log 2$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\log 2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\log 2}$

練習１５）次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+1}\, dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3 dx$　(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (e^t - e^{-t}) dt$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x\, dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta\, d\theta$

(解説)

(1) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+1}\, dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \left[\frac{1}{8}(2x+1)^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}(3^4 - 1) = 10$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (e^t - e^{-t}) dt = \left[e^t + e^{-t}\right]_{-1}^{1} = 0$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x\, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi} = 0$

(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \pi$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 6\theta + \sin 2\theta) d\theta = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{6}\cos 6\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{2}{3}$$

練習１６） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x}-1|\,dx$

(解説)

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $|\sqrt{x}-1| = 1-\sqrt{x}$

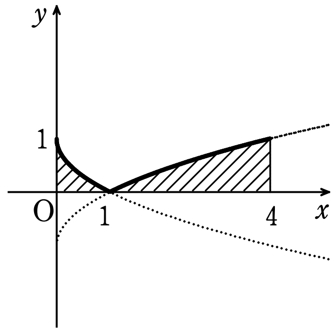
$1 \leqq x \leqq 4$ のとき $|\sqrt{x}-1| = \sqrt{x}-1$

よって

$$\int_0^4 |\sqrt{x}-1|\,dx = \int_0^1 (1-\sqrt{x})\,dx + \int_1^4 (\sqrt{x}-1)\,dx$$

$$= \left[x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x\right]_1^4$$

$$= \left(1-\frac{2}{3}\right) + \left\{\left(\frac{16}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)\right\} = 2$$



入試問題） 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$ の値を求めよ。

【東京電機大】

(解説)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+(2\cos^2 x-1)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 x}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\,dx$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $\cos x \geqq 0$ であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sqrt{2}\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}$$