積分法とその応用【定積分の置換積分法】　p.218～221

□定積分の置換積分法

区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする。

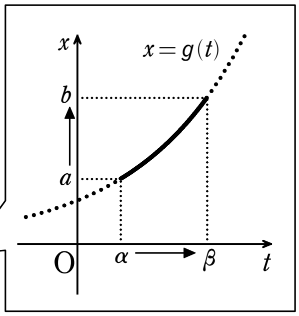
x が微分可能な関数 $g(t)$ を用いて，$x=g(t)$ と表されるとき

$$\frac{d}{dt}F(g(t))=f(g(t))g'(t)$$

$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ とする。図のような x とt の関係を，

右の表のように表す。このとき

x	$a \longrightarrow b$
t	$\alpha \longrightarrow \beta$



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt=\Big[F(g(t))\Big]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=F(g(\beta))-F(g(\alpha))$$

$$=F(b)-F(a)$$

$$=\int_{a}^{b} f(x)dx$$

となる。よって，次の公式が成り立つ。

定積分の置換積分法

$x=g(t)$ とおくとき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$$

x	$a \longrightarrow b$
t	$\alpha \longrightarrow \beta$

例８）　定積分 $\int_1^2 x(2-x)^4dx$ を求める。

$2-x=t$ とおくと

$x=2-t$

$\dfrac{dx}{dt}=-1$　より　$dx=(-1)dt$

$t=2-x$ に
$x=1$ を代入すると $t=1$
$x=2$ を代入すると $t=0$

また、x と t の対応は右のようになる。

x	$1 \longrightarrow 2$
t	$1 \longrightarrow 0$

よって

$$\int_1^2 x(2-x)^4dx=\int_1^0 (2-t)\cdot t^4\cdot(-1)dt$$

文字と同時に
範囲（上端・下端）も変える

$$=\int_1^0 (-2t^4+t^5)dt$$

上端・下端の交換
⇒被積分関数の符号を変える

$$=\int_0^1 (2t^4-t^5)dt$$

$$=\left[\frac{2}{5}t^5-\frac{t^6}{6}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{5}-\frac{1}{6}=\frac{7}{30}$$　終

積分法とその応用【定積分の置換積分法】　p.218〜221

例題８）　a は正の定数とする。定積分 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めよ。

解答　$\boxed{x=a\sin\theta\ \text{とおく}}$ と　$\dfrac{dx}{d\theta}=a\cos\theta$

$\sqrt{a^2-x^2}$ のときは
$x=a\sin\theta$ とおくのは鉄則

$dx=a\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0 \longrightarrow a$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$

$x=0$ のとき
$0=a\sin\theta$
$\sin\theta=0$ なので $\theta=0$
$x=a$ のとき
$a=a\sin\theta$
$\sin\theta=1$ なので $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

この範囲において $\cos\theta \geqq 0$ である。

また，$a>0$ であるから

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2}&=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\\&=\sqrt{a^2\cos^2\theta}\\&=|a\cos\theta|\\&=a\cos\theta\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos\theta)a\cos\theta\,d\theta$$

変数はθなので a は外へ

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

次数下げ

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\pi a^2$$

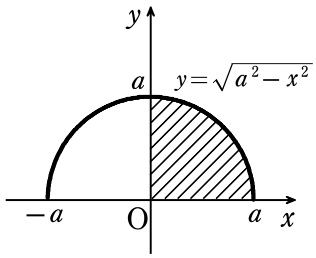
補足　例題 の定積分において，被積分関数

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

のグラフは，右の図のような半円周を表し，

定積分 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，半径 a の四分円

の面積を表す。



よって

$$S=\frac{1}{4}\times\pi\times a^2$$

円の面積の公式

$$=\frac{1}{4}\pi a^2$$

積分法とその応用【定積分の置換積分法】　p.218～221

例題３）　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ。

考え方　$x=\tan\theta$ **とおいて**，$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を利用する。

解答 $\boxed{x=\tan\theta \text{ とおく}}$ と　$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　　$\therefore\ dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

区間 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$

よって

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta$

注意　被積分関数が $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ $(a>0)$ のときは，$\boxed{x=a\tan\theta \text{ とおく}}$ とよい。

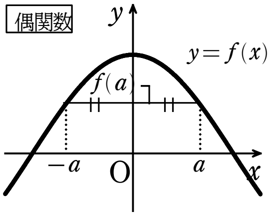
積分法とその応用【定積分の置換積分法】　p.218～221

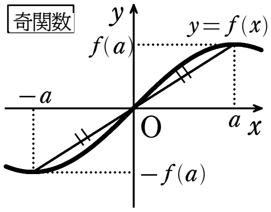
□偶関数，奇関数と定積分

関数 $f(x)$ において，　$f(-x)=f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を **偶関数** といい，

$f(-x)=-f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を **奇関数** という*。

たとえば，x^2，$\cos x$ **は偶関数であり，** x，$\sin x$ **は奇関数**である。





＊ 偶関数のグラフは y 軸に関して対称
奇関数のグラフは 原点に関して対称

関数 $f(x)$ が偶関数または奇関数のとき，次のことが成り立つ。

偶関数，奇関数と定積分

1　偶関数 $f(x)$ について　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

2　奇関数 $f(x)$ について　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

半分だけ計算して２倍（下端が０になるので計算も楽）

上下で打ち消しあう

【証明】関数 $f(x)$ の定積分について，常に次の等式が成り立つ。

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

$\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ において $x=-t$ とおくと　$dx=(-1)dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$-a \longrightarrow 0$
t	$a \longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=\int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt=\int_{0}^{a} f(-t)\,dt=\int_{0}^{a} f(-x)\,dx$

したがって，① から　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{0}^{a}\{f(-x)+f(x)\}dx$

右辺において，

$f(x)$ が偶関数ならば，$f(-x)=f(x)$ から　$f(-x)+f(x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

また，奇関数ならば，$f(-x)=-f(x)$ から　$f(-x)+f(x)=-f(x)+f(x)=0$

したがって，１，２が成り立つ。　終

例）　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3-6x^2+5x+1)dx=2\int_{0}^{1}(-6x^2+1)dx$

$$=2\Big[-2x^3+x\Big]_0^1=-2$$

x^3，$5x$ は奇関数，$-6x^2$，1 は偶関数

例９）　(1)　$f(x)=\cos x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

(2)　$f(x)=\sin x$ は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=0$

練習１７） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^5 dx$

(2) $\displaystyle\int_2^5 x\sqrt{x-1}\, dx$

練習１８） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

練習１９） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$

練習２０） 次の関数の中から，偶関数，奇関数を選べ。

① x^3　　② x^4+3　　③ $\tan x$　　④ $x+\cos x$

練習２１） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+4x+5)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$

練習１７） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^5 dx$　　　(2) $\displaystyle\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

(解説)

(1) $1-x=t$ とおくと　$x=1-t$，$dx=(-1)dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow 0$

よって

$$\int_0^1 x(1-x)^5 dx=\int_1^0 (1-t)t^5(-1)dt=\int_1^0 (t^6-t^5)dt$$

$$=\left[\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}\right]_1^0=0-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{42}$$

(2) $\sqrt{x-1}=t$ とおくと　$x=t^2+1$，$dx=2tdt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$2 \longrightarrow 5$
t	$1 \longrightarrow 2$

よって

$$\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx=\int_1^2 (t^2+1)t\cdot 2tdt=2\int_1^2 (t^4+t^2)dt$$

$$=2\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_1^2=2\left\{\left(\frac{32}{5}+\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{256}{15}$$

別解 (2) $x-1=t$ とおくと　$x=t+1$，$dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$2 \longrightarrow 5$
t	$1 \longrightarrow 4$

よって

$$\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx=\int_1^4 (t+1)\sqrt{t}\,dt=\int_1^4 \left(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\left(\frac{64}{5}+\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)=\frac{256}{15}$$

積分法とその応用【定積分の置換積分法】 練習問題

練習１８） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(解説)

(1) $x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x	$-1 \to 1$
θ	$-\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$

x と θ の対応は右のようにとれる。
この範囲において $\cos\theta \geqq 0$ であるから

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

よって

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cos\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

(2) $x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$-1 \to \sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$

x と θ の対応は右のようにとれる。
この範囲において $\cos\theta \geqq 0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}$$
$$=2\cos\theta$$

よって

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}2\cos\theta\cdot2\cos\theta\,d\theta=4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos2\theta)d\theta=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\pi+\sqrt{3}$$

(3) $x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$1 \to \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$

x と θ の対応は右のようにとれる。
この範囲において $\cos\theta \geqq 0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

よって

$$\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2\cos\theta}\cdot2\cos\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}$$

練習１９） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$　　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$

(解説)

(1) $x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{3}$

x と θ の対応は右のようにとれる。

よって

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$$

(2) $x=2\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$-2 \longrightarrow 2$
θ	$-\dfrac{\pi}{4} \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$

x と θ の対応は右のようにとれる。

よって

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\tan^2\theta+4}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2\theta}{4}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{1}{2}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

練習２０） 次の関数の中から，偶関数，奇関数を選べ。

① x^3　　② x^4+3　　③ $\tan x$　　④ $x+\cos x$

(解説)

偶関数は ②，奇関数は ①，③

練習２１） 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+4x+5)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$

(解説)

(1) x^3，$4x$ はともに奇関数，$3x^2$，5 はともに偶関数であるから

$$\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+4x+5)dx=2\int_0^2(3x^2+5)dx$$
$$=2\Big[x^3+5x\Big]_0^2=36$$

(2) e^x-e^{-x} は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})dx=0$

(3) $x\sqrt{4-x^2}$ は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx=0$

(4) $\sin^2 x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$