積分法とその応用【定積分の部分積分法】　p.222～223

□定積分の部分積分法

不定積分の部分積分法の公式から，次の公式が得られる。

定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

基本は不定積分同様表の活用

積分		
	○	△
微分		

前半は $\Big[\quad\Big]_{下}^{上}$　後半は $\int_{下}^{上}$

練習２２）　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$

解答

(1) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$

積分	$\frac{1}{2}x^2$	$-\cos x$
	x	$\sin x$
微分	1	$\cos x$

$$=\Big[x(-\cos x)\Big]_0^\pi-\int_0^\pi 1\cdot(-\cos x)\,dx$$
$$=-\pi\cos\pi+0+\int_0^\pi\cos x\,dx$$
$$=\pi+\Big[\sin x\Big]_0^\pi$$
$$=\pi+\sin\pi-\sin 0$$
$$=\pi$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$

積分	$\frac{1}{2}x^2$	e^x
	x	e^x
微分	1	e^x

$$=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 1\cdot e^x\,dx$$
$$=e-\int_0^1 e^x\,dx$$
$$=e-\Big[e^x\Big]_0^1$$
$$=e-(e^1-e^0)$$
$$=1$$

(3) $$\int_1^2 x\log x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=2\log 2-\frac{1}{2}\log 1-\frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$$
$$=2\log 2-\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$
$$=2\log 2-\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\log 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=2\log 2-\frac{3}{4}$$

積分	$\frac{1}{2}x^2$	?
	x	$\log x$
微分	1	$\frac{1}{x}$

積分法とその応用【定積分の部分積分法】 p.222〜223

研究） 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$

定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$ は，次のように求められる。

$$I=\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx}$$

← 部分積分法

積分	e^x	$-\cos x$
	e^x	$\sin x$
微分	e^x	$\cos x$

$$=\Big[e^x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}-e^0\sin 0-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx}$$

← 部分積分法

積分	e^x	$\sin x$
	e^x	$\cos x$
微分	e^x	$-\sin x$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\left\{\Big[e^x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\sin x)\,dx\right\}$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\left\{e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}-e^0\cos 0+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx\right\}$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-0+1-\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx}$$

I と同じ式が現れる。

$$=e^{\frac{\pi}{2}}+1-I$$

これより，$I=e^{\frac{\pi}{2}}+1-I$ であるから　　$I=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$

練習２３） 部分積分法によって，定積分 $\int_{-1}^{1}(x+1)^3(x-1)\,dx$ を求めよ。

練習２４） 部分積分法を 2 回利用して，定積分 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$ を求めよ。

練習１） 定積分 $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$ を求めよ。

練習２） n は0または正の整数とする。定積分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ について，次の問いに答えよ。ただし，$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$ である。

(1)　I_0，I_1 を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，$\sin^n x=\sin^{n-1}x\sin x=\sin^{n-1}x(-\cos x)'$ である。I_n に部分積分法を適用して，次のことを示せ。

$n\geqq 2$ のとき　　$I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$

(3)　$n\geqq 2$ のとき，次のことを示せ。

n が偶数のとき　$I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

n が奇数のとき　$I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1$

練習２３） 部分積分法によって，定積分 $\int_{-1}^{1}(x+1)^3(x-1)dx$ を求めよ。

(解説)

$$\int_{-1}^{1}(x+1)^3(x-1)dx=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{(x+1)^4}{4}\right\}'(x-1)dx$$

$$=\left[\frac{(x+1)^4}{4}\cdot(x-1)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{(x+1)^4}{4}\cdot(x-1)'dx$$

$$=0-\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(x+1)^4dx$$

$$=-\frac{1}{20}\Big[(x+1)^5\Big]_{-1}^{1}=-\frac{8}{5}$$

練習２４） 部分積分法を 2 回利用して，定積分 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx$ を求めよ。

(解説)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2(-\cos x)'dx=\Big[x^2(-\cos x)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x^2)'(-\cos x)dx$$

$$=0+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x)'dx$$

$$=2\Big[x\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x)'\cdot\sin x\,dx$$

$$=\pi+2\Big[\cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$$

練習１） 定積分 $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$ を求めよ。

(解説)

$$J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(e^x)'\cos x\,dx=\Big[e^x\cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x(-\sin x)dx$$

$$=-1+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(e^x)'\sin x\,dx$$

$$=-1+\Big[e^x\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$$

$$=-1+e^{\frac{\pi}{2}}-J$$

これより，$J=-1+e^{\frac{\pi}{2}}-J$ であるから　　$J=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$

練習２） n は0または正の整数とする。定積分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ について，次の問いに答えよ。ただし，$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$ である。

(1) I_0，I_1 を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，$\sin^n x=\sin^{n-1}x\sin x=\sin^{n-1}x(-\cos x)'$ である。I_n に部分積分法を適用して，次のことを示せ。

$n\geqq 2$ のとき　$I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$

(3) $n\geqq 2$ のとき，次のことを示せ。

n が偶数のとき　$I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

n が奇数のとき　$I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1$

解説

(1) $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}$，　$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

(2) $n\geqq 2$ のとき

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(-\cos x)'dx$$

$$=\Big[-\sin^{n-1}x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

$$=0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\right)$$

$$=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

(3) (2) より，$I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$ であるから，次の漸化式が成り立つ。

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

よって，n が偶数のとき

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

また，n が奇数のとき

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$$