

□定積分と導関数

$a$  を定数とすると、 $F'(t) = f(t)$  とすると

$$\int_a^x f(t) dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$$

$F(x)$  は  $x$  の関数  
 $F(x)$  は定数扱い

$F(x)$  は定数扱いなので  
微分すると 0 になる

この両辺の関数を  $x$  で微分すると、次の公式が得られる。

$x$  の関数  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt$  の  
導関数は  $f(x)$

定積分と導関数

$a$  が定数のとき  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

$$\frac{d}{d\Box} \int_a^{\Box} f(t) dt = f(\Box)$$

練習 2 5 改) 次の関数を  $x$  で微分せよ。ただし、 $a$  は定数とする。

(1)  $\int_a^x \sin t dt$

(2)  $\int_x^1 \frac{t^3}{1+e^t} dt$

$\int_x^1 f(t) dt$  だと

$$[F(t)]_x^1 = F(1) - F(x)$$

となるので、あらかじめ  
上下を変えて符号を変えておく

【解答】

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \sin t dt = \sin x$$

$$\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{t^3}{1+e^t} dt$$

$$= -\frac{d}{dx} \int_1^x \frac{t^3}{1+e^t} dt = -\frac{x^3}{1+e^x}$$

応用例題 3 改) 関数  $G(x) = \int_0^x (x-t) \cos t dt$  の  $G''(x)$  を求めよ。

【ヒント】 右辺の積分の計算では、積分変数でない  $x$  は定数として扱う。

【解答】  $G(x) = \int_0^x x \cos t dt - \int_0^x t \cos t dt$

$= x \int_0^x \cos t dt - \int_0^x t \cos t dt$  であるから

積の微分法

微分そのまま、そのまま微分

$$G'(x) = (x) \int_0^x \cos t dt + x \left( \frac{d}{dx} \int_0^x \cos t dt \right) - \frac{d}{dx} \int_0^x t \cos t dt$$

$$= \int_0^x \cos t dt + x \cos x - x \cos x$$

$$= \int_0^x \cos t dt$$

よって  $G'(x) = \int_0^x \cos t dt$  であるから、

両辺を  $x$  で微分すると

$$G''(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \cos t dt = \cos x$$

【何を求めるのかをよく考えよう】

$$G'(x) = \int_0^x \cos t dt = [\sin t]_0^x$$

$$= \sin x - \sin 0 = \sin x$$

$x$  で微分すると

$$G''(x) = \cos x$$

この流れは  $G'(x)$  が間かかれていないのなら

積分→微分と無駄が多いこととなる

応用例題4) 関数  $\int_x^{2x} \sin t dt$  を  $x$  で微分せよ。

【解答】  $F'(t) = \sin t$  とすると  $\int_x^{2x} \sin t dt = [F(t)]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$

よって  $\frac{d}{dx} \int_x^{2x} \sin t dt = \frac{d}{dx} \{F(2x) - F(x)\} = F'(2x) \cdot (2x)' - F'(x) = 2\sin 2x - \sin x$

上端下端とも数値であるので  
計算結果は定数となる

応用例題5) 等式  $f(x) = x + \int_0^\pi f(t) \sin t dt$  を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。

【解答】

$\int_0^\pi f(t) \sin t dt = a \dots\dots ①$

数Ⅱのときと同様  
定数となる部分を文字で置き換える

とおくと、与えられた等式から

$f(x) = x + a \dots\dots ②$

となる。

②において  $x=t$  とすると

$f(t) = t + a$

①に当てはめて積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(t) \sin t dt &= \int_0^\pi (t+a) \sin t dt \\ &= \int_0^\pi t \sin t dt + \int_0^\pi a \sin t dt \\ &= \int_0^\pi t \sin t dt + \int_0^\pi a \sin t dt \\ &= [-t \cos t]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos t) dt + a \int_0^\pi \sin t dt \\ &= -\pi \cos \pi + 0 + [\sin t]_0^\pi + a [(-\cos t)]_0^\pi \\ &= \pi + (\sin \pi - \sin 0) - a(\cos \pi - \cos 0) \\ &= \pi + 0 - 0 - a(-1 - 1) \\ &= \pi + 2a \end{aligned}$$

積分	$\frac{1}{2}x^2$	$-\cos t$
	$t$	$\sin t$
微分	1	$\cos t$

ゆえに、①より  $\pi + 2a = a$  から  $a = -\pi$

$\therefore a = -\frac{1}{4}$

これを②に代入して  $f(x) = x - \pi$

練習26) 関数  $G(x) = \int_0^x (x-t)e^t dt$  について,  $G'(x)$  および  $G''(x)$  を求めよ。

練習27) 関数  $\int_x^{3x} t \cos t dt$  を  $x$  で微分せよ。

練習28) 等式  $f(x) = x + \int_0^1 f(t)e^t dt$  を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。

**入試問題** 関数  $f(x)$  がすべての実数  $x$  について、 $f(x) = x + \int_0^1 2^{2t+x} f(t) dt$  を満たしているとき、 $f(0)$  の値を求めよ。【福島県立医科大】

練習26) 関数  $G(x) = \int_0^x (x-t)e^t dt$  について、 $G'(x)$  および  $G''(x)$  を求めよ。

解説

$G(x) = x \int_0^x e^t dt - \int_0^x te^t dt$  であるから

$$G'(x) = \int_0^x e^t dt + xe^x - xe^x = [e^t]_0^x = e^x - 1$$

$$G''(x) = e^x$$

練習27) 関数  $\int_x^{3x} t \cos t dt$  を  $x$  で微分せよ。

解説

$F'(t) = t \cos t$  とすると

$$\int_x^{3x} t \cos t dt = [F(t)]_x^{3x} = F(3x) - F(x)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \frac{d}{dx} \int_x^{3x} t \cos t dt &= \frac{d}{dx} \{F(3x) - F(x)\} \\ &= F'(3x) \cdot (3x)' - F'(x) \\ &= 3 \cdot 3x \cos 3x - x \cos x \\ &= 9x \cos 3x - x \cos x \end{aligned}$$

練習28) 等式  $f(x) = x + \int_0^1 f(t)e^t dt$  を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。

解説

$\int_0^1 f(t)e^t dt = a$  とおくと

$$f(x) = x + a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int_0^1 f(t)e^t dt &= \int_0^1 (t+a)e^t dt = \int_0^1 (t+a)(e^t)' dt \\ &= [(t+a)e^t]_0^1 - \int_0^1 (t+a)' e^t dt \\ &= (1+a)e - a - \int_0^1 e^t dt \\ &= (1+a)e - a - [e^t]_0^1 \\ &= (1+a)e - a - (e-1) \\ &= ae - a + 1 \end{aligned}$$

積分法とその応用【定積分のいろいろな問題】 練習問題

これより,  $ae - a + 1 = a$  であるから

$$(e-2)a = -1 \quad \text{すなわち} \quad a = \frac{1}{2-e}$$

これを①に代入して  $f(x) = x + \frac{1}{2-e}$

**入試問題** 関数  $f(x)$  がすべての実数  $x$  について,  $f(x) = x + \int_0^1 2^{2t+x} f(t) dt$  を満たしているとき,  $f(0)$  の値を求めよ。【福島県立医科大】

解説

$$f(x) = x + 2^x \int_0^1 2^{2t} f(t) dt$$

$$\int_0^1 2^{2t} f(t) dt = a \quad \text{とすると} \quad f(x) = x + a \cdot 2^x$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int_0^1 2^{2t} f(t) dt &= \int_0^1 2^{2t}(t + a \cdot 2^t) dt = \int_0^1 2^{2t} t dt + a \int_0^1 2^{3t} dt \\ &= \int_0^1 \left( \frac{2^{2t}}{2 \log 2} \right)' t dt + a \left[ \frac{2^{3t}}{3 \log 2} \right]_0^1 \\ &= \left[ \frac{2^{2t}}{2 \log 2} t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2^{2t}}{2 \log 2} dt + a \left( \frac{8}{3 \log 2} - \frac{1}{3 \log 2} \right) \\ &= \frac{4}{2 \log 2} - \left[ \frac{2^{2t}}{4(\log 2)^2} \right]_0^1 + \frac{7}{3 \log 2} a \\ &= \frac{2}{\log 2} - \frac{4}{4(\log 2)^2} + \frac{1}{4(\log 2)^2} + \frac{7}{3 \log 2} a \\ &= \frac{7}{3 \log 2} a - \frac{3}{4(\log 2)^2} + \frac{2}{\log 2} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{7}{3 \log 2} a - \frac{3}{4(\log 2)^2} + \frac{2}{\log 2} = a$$

$$\left( \frac{7}{3 \log 2} - 1 \right) a = \frac{3}{4(\log 2)^2} - \frac{2}{\log 2}$$

$$\text{両辺に } 12(\log 2)^2 \text{ を掛けて} \quad 4 \log 2 (7 - 3 \log 2) a = 3(3 - 8 \log 2)$$

$$a = \frac{3(3 - 8 \log 2)}{4 \log 2 (7 - 3 \log 2)}$$

$$\text{ゆえに} \quad f(0) = a \cdot 2^0 = \frac{3(3 - 8 \log 2)}{4 \log 2 (7 - 3 \log 2)}$$