積分法とその応用【定積分のいろいろな問題】　p.224～225

□定積分と導関数

a を定数とするとき，$F'(t)=f(t)$ とすると

$$\int_a^x f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_a^x=F(x)-F(a)$$

$F(x)$ は x の関数
$F(a)$ は定数扱い

$F(a)$ は定数扱いなので
微分すると０になる

この両辺の関数を x で微分すると，次の公式が得られる。

x の関数 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ の
導関数は $f(x)$

定積分と導関数

a が定数のとき　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

$$\frac{d}{d\square}\int_a^{\square} f(t)\,dt=f(\square)$$

練習２５改）　次の関数を x で微分せよ。ただし，a は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_a^x \sin t\,dt$　　(2) $\displaystyle\int_x^1 \frac{t^3}{1+e^t}\,dt$

解答

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \sin t\,dt=\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{t^3}{1+e^t}\,dt$$
$$=-\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{t^3}{1+e^t}\,dt=-\frac{x^3}{1+e^x}$$

$\displaystyle\int_x^1 f(t)dt$ だと
$\Big[F(t)\Big]_x^1=F(1)-F(x)$
となるので、あらかじめ
上下を変えて符号を変えておく

応用例題３改）　関数 $G(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)\cos t\,dt$ の $G''(x)$ を求めよ。

ヒント　右辺の積分の計算では，積分変数でない x は定数として扱う。

解答　$G(x)=\displaystyle\int_0^x x\cos t\,dt-\int_0^x t\cos t\,dt$

$=x\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt-\int_0^x t\cos t\,dt$　であるから

$$G'(x)=(x)'\int_0^x \cos t\,dt+x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\,dt\right)-\frac{d}{dx}\int_0^x t\cos t\,dt$$
$$=\int_0^x \cos t\,dt+x\cos x-x\cos x$$
$$=\int_0^x \cos t\,dt$$

積の微分法
微分そのまま、そのまま微分

よって　$G'(x)=\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt$ であるから，

両辺を x で微分すると

$$G''(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\,dt$$
$$=\cos x$$

【何を求めるのかをよく考えよう】

$G'(x)=\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_0^x$
$=\sin x-\sin 0=\sin x$
x で微分すると
$G''(x)=\cos x$
この流れは $G'(x)$ が聞かれていないのなら
積分→微分と無駄が多いこととなる

積分法とその応用【定積分のいろいろな問題】 p.224～225

応用例題４） 関数 $\displaystyle\int_x^{2x}\sin t\,dt$ を x で微分せよ。

解答　$F'(t)=\sin t$ とすると $\displaystyle\int_x^{2x}\sin t\,dt=\Big[F(t)\Big]_x^{2x}=F(2x)-F(x)$

よって $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^{2x}\sin t\,dt=\frac{d}{dx}\{F(2x)-F(x)\}=F'(2x)\cdot(2x)'-F'(x)=2\sin 2x-\sin x$

上端下端とも数値であるので
計算結果は定数となる

応用例題５） 等式 $f(x)=x+\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt}$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解答

$$\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt=a \quad\cdots\cdots ①$$

数Ⅱのときと同様
定数となる部分を文字で置き換える

とおくと，与えられた等式から

$$f(x)=x+a \quad\cdots\cdots ②$$

となる。

②において $x=t$ とすると

$$f(t)=t+a$$

①に当てはめて積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt&=\int_0^{\pi}(t+a)\sin t\,dt\\&=\int_0^{\pi}t\sin t\,dt+\int_0^{\pi}a\sin t\,dt\\&=\boxed{\int_0^{\pi}t\sin t\,dt}+\int_0^{\pi}a\sin t\,dt\\&=\Big[-t\cos t\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos t)dt+a\int_0^{\pi}\sin t\,dt\\&=-\pi\cos\pi+0+\Big[\sin t\Big]_0^{\pi}+a\Big[(-\cos t)\Big]_0^{\pi}\\&=\pi+(\sin\pi-\sin 0)-a(\cos\pi-\cos 0)\\&=\pi+0-0-a(-1-1)\\&=\pi+2a\end{aligned}$$

積分	$\frac{1}{2}x^2$	$-\cos t$
	t	$\sin t$
微分	1	$\cos t$

ゆえに，①より　$\pi+2a=a$ から　$a=-\pi$

これを ② に代入して　$f(x)=x-\pi$

練習２６） 関数 $G(x)=\int_0^x (x-t)e^t dt$ について，$G'(x)$ および $G''(x)$ を求めよ。

練習２７） 関数 $\int_x^{3x} t\cos t\,dt$ を x で微分せよ。

練習２８） 等式 $f(x)=x+\int_0^1 f(t)e^t dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

入試問題） 関数 $f(x)$ がすべての実数 x について，$f(x)=x+\int_0^1 2^{2t+x}f(t)\,dt$ を満たしているとき，$f(0)$ の値を求めよ。【福島県立医科大】

練習２６） 関数 $G(x)=\int_0^x (x-t)e^t dt$ について，$G'(x)$ および $G''(x)$ を求めよ。

(解説)

$G(x)=x\int_0^x e^t dt-\int_0^x te^t dt$ であるから

$$G'(x)=\int_0^x e^t dt+xe^x-xe^x=\Big[e^t\Big]_0^x=e^x-1$$

$$G''(x)=e^x$$

練習２７） 関数 $\int_x^{3x} t\cos t\,dt$ を x で微分せよ。

(解説)

$F'(t)=t\cos t$ とすると

$$\int_x^{3x} t\cos t\,dt=\Big[F(t)\Big]_x^{3x}=F(3x)-F(x)$$

よって
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^{3x} t\cos t\,dt&=\frac{d}{dx}\{F(3x)-F(x)\}\\&=F'(3x)\cdot(3x)'-F'(x)\\&=3\cdot 3x\cos 3x-x\cos x\\&=9x\cos 3x-x\cos x\end{aligned}$$

練習２８） 等式 $f(x)=x+\int_0^1 f(t)e^t dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(解説)

$\int_0^1 f(t)e^t dt=a$ とおくと

$$f(x)=x+a \quad \cdots\cdots ①$$

よって
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)e^t dt&=\int_0^1 (t+a)e^t dt=\int_0^1 (t+a)(e^t)'dt\\&=\Big[(t+a)e^t\Big]_0^1-\int_0^1 (t+a)'e^t dt\\&=(1+a)e-a-\int_0^1 e^t dt\\&=(1+a)e-a-\Big[e^t\Big]_0^1\\&=(1+a)e-a-(e-1)\\&=ae-a+1\end{aligned}$$

これより，$ae-a+1=a$ であるから

$$(e-2)a=-1 \qquad \text{すなわち} \qquad a=\frac{1}{2-e}$$

これを ① に代入して　　$f(x)=x+\dfrac{1}{2-e}$

入試問題） 関数 $f(x)$ がすべての実数 x について，$f(x)=x+\displaystyle\int_0^1 2^{2t+x}f(t)\,dt$ を満たしているとき，$f(0)$ の値を求めよ。【福島県立医科大】

(解説)

$f(x)=x+2^x\displaystyle\int_0^1 2^{2t}f(t)\,dt$

$\displaystyle\int_0^1 2^{2t}f(t)\,dt=a$ とすると　$f(x)=x+a\cdot 2^x$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^1 2^{2t}f(t)\,dt&=\int_0^1 2^{2t}(t+a\cdot 2^t)\,dt=\int_0^1 2^{2t}t\,dt+a\int_0^1 2^{3t}\,dt\\&=\int_0^1\left(\frac{2^{2t}}{2\log 2}\right)'t\,dt+a\left[\frac{2^{3t}}{3\log 2}\right]_0^1\\&=\left[\frac{2^{2t}}{2\log 2}t\right]_0^1-\int_0^1\frac{2^{2t}}{2\log 2}\,dt+a\left(\frac{8}{3\log 2}-\frac{1}{3\log 2}\right)\\&=\frac{4}{2\log 2}-\left[\frac{2^{2t}}{4(\log 2)^2}\right]_0^1+\frac{7}{3\log 2}a\\&=\frac{2}{\log 2}-\frac{4}{4(\log 2)^2}+\frac{1}{4(\log 2)^2}+\frac{7}{3\log 2}a\\&=\frac{7}{3\log 2}a-\frac{3}{4(\log 2)^2}+\frac{2}{\log 2}\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{7}{3\log 2}a-\frac{3}{4(\log 2)^2}+\frac{2}{\log 2}=a$$

$$\left(\frac{7}{3\log 2}-1\right)a=\frac{3}{4(\log 2)^2}-\frac{2}{\log 2}$$

両辺に $12(\log 2)^2$ を掛けて　　$4\log 2(7-3\log 2)a=3(3-8\log 2)$

$$a=\frac{3(3-8\log 2)}{4\log 2(7-3\log 2)}$$

ゆえに　　$f(0)=a\cdot 2^0=\dfrac{3(3-8\log 2)}{4\log 2(7-3\log 2)}$