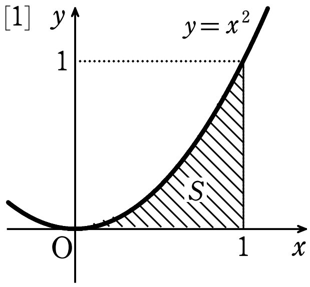
積分法とその応用【定積分と区分求積法】　p.226～228

□定積分と区分求積法

[1]

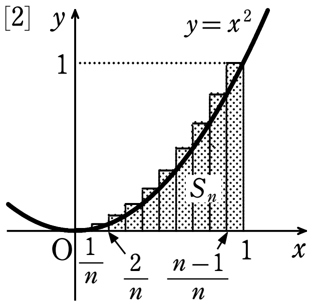


関数 $f(x)=x^2$ について，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積 S を考えてみよう。

定積分を用いて S を求めると　$S=\int_0^1 x^2dx=\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1=\dfrac{1}{3}$

一方，図 [2] のように区間 [0，1] を n 等分して n 個の長方形を作り，それらの面積の和を S_n とする。$n \longrightarrow \infty$ のとき，この長方形の集まりは図 [1] の斜線で示した図形に限りなく近づくから，$S_n \longrightarrow S$ と予想される。 実際に計算してみよう。

[2]



$$S_n=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

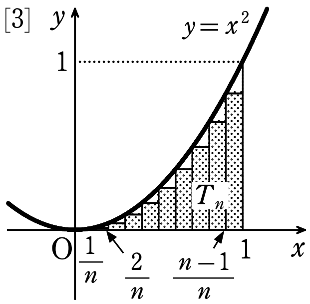
$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=S$ が成り立つことが計算で確かめられた。

上の S_n の代わりに，右の図 [3] の長方形の面積の和 T_n を考えても，

[3]



$$T_n=\frac{1}{n}\left\{0+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

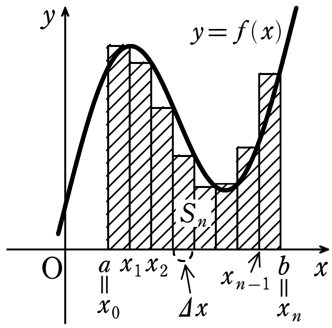
よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}=S$

このように，区間を細分し，和の極限値として面積や体積を求める方法を一般に **区分求積法** という。

積分法とその応用【定積分と区分求積法】 p.226～228

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，常に $f(x)\geqq 0$ のとき，区間 $[a,\ b]$ を n 等分して，その分点の座標を，a に近い方から順に　$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots,\ x_{n-1}$　とし，次のようにおく。

$$a=x_0,\ b=x_n,\ \frac{b-a}{n}=\Delta x$$



このとき，右の図の斜線部分の面積　S_n は

$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots\cdots+f(x_n)\Delta x$$
$$=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

であり，$n\longrightarrow\infty$ のとき $S_n\longrightarrow S$ と考えられる。

一般に，常に $f(x)\geqq 0$ と仮定しなくても，次のことが成り立つ。

区分求積法と定積分

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx$$

ただし，$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，$x_k=a+k\Delta x$

$\leftarrow \Delta x=\dfrac{1}{n}$

$x_k=\dfrac{k}{n}$

とくに $a=0$，$b=1$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

応用例題６） 次の極限値を求めよ。　$S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

方針　$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形を作るために，①　$\dfrac{1}{n}$ をくくり出す。

②　$x=\dfrac{k}{n}$ となるところを探す。（$k=1,2,3,\cdots\cdots,n$）

解答

$$S=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{1+\boxed{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{1+\boxed{\frac{2}{n}}}+\frac{1}{1+\boxed{\frac{3}{n}}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\boxed{\frac{n}{n}}}\right)$$

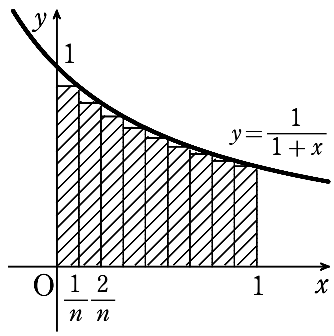
$$=\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\boxed{\frac{k}{n}}}\right)$$

ここで，$f(x)=\dfrac{1}{1+\boxed{x}}$ とすると

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1$$

$$=\log 2-\log 1\ =\log 2$$



積分法とその応用【定積分と区分求積法】　p.226～228

練習３０） 極限値 $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4)$ を求めよ。

入試問題） 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

【愛媛大】

積分法とその応用【定積分と区分求積法】 p.226～228

入試問題）

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \log\frac{x+2}{x+1}\,dx$ を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots\cdots(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

【横浜市立大】

練習３０） 極限値 $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4)$ を求めよ。

(解説)

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\left(\frac{3}{n}\right)^4+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^4\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4=\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

入試問題） 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

【愛媛大】

(解説)

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

よって　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=\log 2$

積分法とその応用【定積分と区分求積法】 p.226～228

入試問題）

(1) 定積分 $\int_0^1 \log\frac{x+2}{x+1}\,dx$ を求めよ。

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\ \cdots\cdots\ (2n+n)}{(n+1)(n+2)\ \cdots\cdots\ (n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

【横浜市立大】

(解説)

(1)
$$\int_0^1 \log\frac{x+2}{x+1}\,dx=\int_0^1\{\log(x+2)-\log(x+1)\}dx$$
$$=\int_0^1(x+2)'\log(x+2)dx-\int_0^1(x+1)'\log(x+1)dx$$
$$=\Big[(x+2)\log(x+2)\Big]_0^1-\int_0^1(x+2)\cdot\frac{1}{x+2}dx$$
$$-\Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_0^1+\int_0^1(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx$$
$$=3\log3-2\log2-\int_0^1dx-2\log2+\int_0^1dx=3\log3-4\log2$$
$$=\log\frac{3^3}{2^4}=\log\frac{27}{16}$$

(2) $a_n=\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\log\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\log\frac{2+\frac{n}{n}}{1+\frac{n}{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\log\frac{2+x}{1+x}\,dx$$

よって，(1) から $\lim_{n\to\infty}\log a_n=\log\frac{27}{16}$ ゆえに $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{27}{16}$