

【内容目標】 いろいろな曲線の接線を求められるようになろう。

□ 曲線 $y = f(x)$ の接線 (2年生のおさらい)

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき、微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の傾きに等しい。よって、次のことが成り立つ。

接線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

接線は直線なので1次関数

例題 1 曲線 $y = \sqrt{x}$ 上の点 $(4, 2)$ における接線の方程式を求めよ。

解答 $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ とすると まずは微分

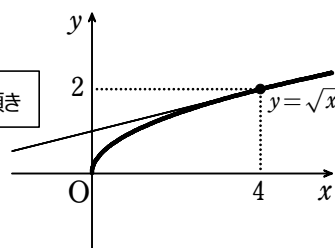
$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(4, 2) における接線の傾き

であるから $x = 4$ のとき $f'(4) = \frac{1}{4}$

よって、点 $(4, 2)$ における接線の方程式は

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{4}x + 1$$



□ 曲線 $y = f(x)$ の法線

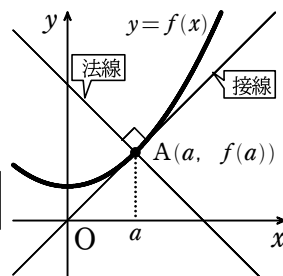
関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき、微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の傾きに等しい。曲線上の点 A を通り、 A におけるこの曲線の接線と垂直な直線を、点 A におけるこの曲線の **法線** という。

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ に等しいから、 $f'(a) \neq 0$ のとき、点 A における法線の

傾きは $-\frac{1}{f'(a)}$ である。

掛けて -1 $\Rightarrow$ 符号違いの逆数

よって、次のことが成り立つ。



接線の方程式・法線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における

接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

法線の方程式は $f'(a) \neq 0$ のとき

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

注意 $f'(a) = 0$ のとき、法線の方程式は $x = a$ である。

法線の方程式は $f'(a)\{y - f(a)\} = -(x - a)$ とかくと $f'(a)$ の区別が不要となる。

例1) 曲線 $y=e^x$ 上の点 $(1, e)$ における法線の方程式を求める。

$f(x)=e^x$ とすると

まずは微分

$$f'(x)=e^x$$

よって

$$f'(1)=e$$

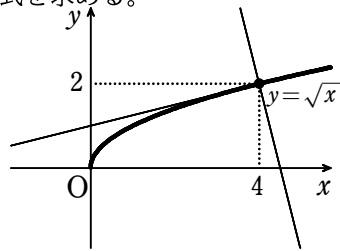
$(1, e)$ における接線の傾き

なので法線の傾きは $-\frac{1}{e}$

符号違いの逆数

したがって、この法線の方程式は

$$y-e=-\frac{1}{e}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{1}{e}x+e+\frac{1}{e} \quad \text{終}$$



□傾きや通る1点から接線の方程式を決定

応用例題1) 曲線 $y=\log x$ について、次のような接線の方程式を求めよ。

(1) 傾きが e である

(2) 原点を通る

方針 接点がわからないので、自分で接点を作る

数Ⅱの時と同じ

⇒接点の座標を $(a, \log a)$ として、この点における接線の方程式を作り、
条件を満たすように a の値を定める。

解答 $y=\log x$ を微分すると $y'=\frac{1}{x}$

接点の x 座標を a とすると
接点の y 座標は $y=\log x$ に
代入して $\log a$ となる

ここで、接点の座標を $(a, \log a)$ とすると、接線の方程式は

$$y-\log a=\frac{1}{a}(x-a)$$

接点の x 座標も x にしてしまうと、
関数や方程式の x と紛らわしくなる

$$y-\log a=\frac{1}{a}x-1$$

$$\text{すなわち} \quad y=\frac{1}{a}x+\log a-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(1) 接線①の傾きが e であるから

$$\frac{1}{a}=e \quad \text{すなわち} \quad a=\frac{1}{e}$$

①に代入すると

$$y=ex-1-1$$

整理して $y=ex-2$

(2) 接線①が原点 $(0, 0)$ を通るから

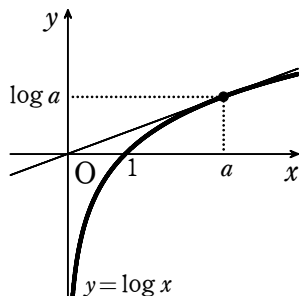
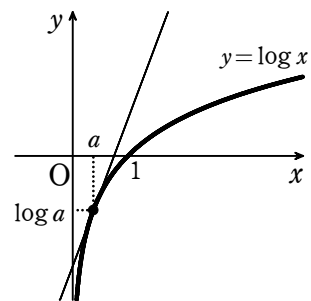
$$0=\frac{1}{a} \cdot 0+\log a-1$$

$$\text{よって} \quad \log a=1$$

$$\text{したがって} \quad a=e$$

①に代入すると

$$y=\frac{1}{e}x$$



□ 曲線の方程式と接線

曲線が x, y の方程式 (陰関数) で表される場合には, y を x の関数とみて, 方程式を x で微分して導関数 y' を求めることができる。

例) 円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の点 $(\sqrt{3}, 1)$ における接線

$x^2 + y^2 = 4$ の両辺を x で微分すると

$$2x + 2yy' = 0$$

よって, $y \neq 0$ のとき $y' = -\frac{x}{y}$

$x = \sqrt{3}, y = 1$ を代入すると接線の傾きは

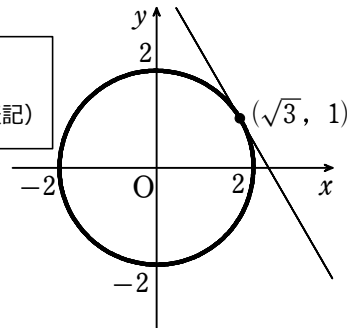
$$-\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

よって接線は $y - 1 = -\sqrt{3}(x - \sqrt{3})$

$$y - 1 = -\sqrt{3}x + 3$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}x + 4$$

x だったらいいのにな
(ここでは $\frac{dy}{dx}$ ではない表記)



数Ⅱのときは公式より

$$\sqrt{3}x + 1 \cdot y = 4$$

これを変形すると $y = -\sqrt{3}x + 4$

(円であれば公式で良い)

例題2) 楕円 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点 $(2, 1)$ における接線の方程式を求めよ。

【解答】 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{8} + \frac{2yy'}{2} = 0$$

よって, $y \neq 0$ のとき

$$y' = -\frac{x}{4y}$$

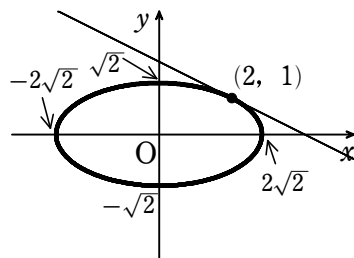
ゆえに, 点 $(2, 1)$ における接線の傾きは $-\frac{2}{4 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$

したがって, 求める接線の方程式は

$$y - (-1) = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{2}x + 2$$

ちなみに楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の接線の公式は $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

$$\frac{2 \cdot x}{8} + \frac{1 \cdot y}{2} = 1 \text{ より } x + 2y = 4 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 2$$



他の平面図形も含め

数Ⅱで学んだ

円の接線の方程式の

覚え方が流用できる

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Rightarrow x \cdot x + y \cdot y = r^2$$

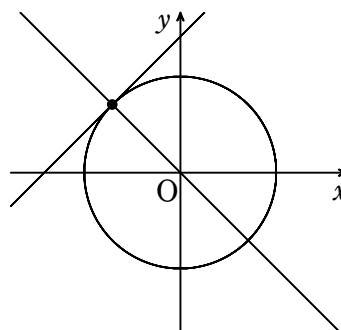
$$\Rightarrow x_1x + y_1y = r^2$$

□媒介変数で表示された曲線の接線（教科書外）

媒介変数で表示された曲線の場合には、媒介変数の微分法を利用して導関数 y' を求めることができる。

例題） 与えられた点 P における、次の曲線の接線および法線の方程式を求めよ。

$$x = 2\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta, \quad P \text{ は } \theta = \frac{3}{4}\pi \text{ に対応する点}$$



解答 $\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta$ それぞれ微分

ゆえに $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos\theta}{-2\sin\theta} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ 合体

よって、 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ のときの接線の傾きは $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\frac{3}{4}\pi}{\sin\frac{3}{4}\pi} = -\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$

また、 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ のとき $x = 2\cos\frac{3}{4}\pi = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$

$$y = 2\sin\frac{3}{4}\pi = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

ゆえに、点 $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ における接線の方程式は

$$y - \sqrt{2} = x - (-\sqrt{2})$$

すなわち $y = x + 2\sqrt{2}$

法線の方程式は

$$y - \sqrt{2} = -(x + \sqrt{2})$$

すなわち $y = -x$

法線の傾きは-1