

# 加法定理の証明 【三角関数】

◎まずはじめに

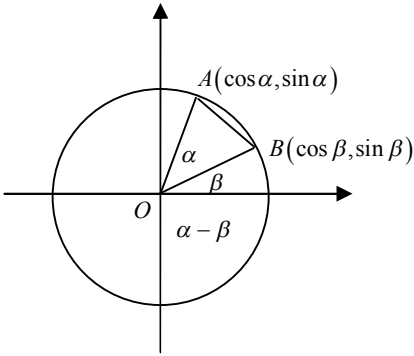
教科書 p59

2点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  間の距離は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

●  $\cos(\alpha - \beta) \rightarrow \cos(\alpha + \beta) \rightarrow \dots$

下の図で△OAB を考えると…



余弦定理から

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} \\ &= \frac{1 + 1 - \{(\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2\}}{2} \\ &= \frac{2 - (2 - 2\cos \alpha \cos \beta - 2\sin \alpha \sin \beta)}{2} \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

よって

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \dots \textcircled{1}$$

また①の等式で  $\beta$  を  $-\beta$  に置き換えると

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta)$$

三角関数の性質から

$$\cos(-\beta) = \cos \beta, \sin(-\beta) = -\sin \beta$$

であるから、整理すると

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \dots \textcircled{2}$$

①の等式で  $\alpha$  を  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  に置き換えると

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right\} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta$$

$$\cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right\} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta$$

三角関数の性質から

$$\cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right\} = \sin(\alpha + \beta),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

であるから、整理すると

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \dots \textcircled{3}$$

③の等式で  $\beta$  を  $-\beta$  に置き換えると

$$\sin\{\alpha + (-\beta)\} = \sin \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \cos(-\beta)$$

三角関数の性質から

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cos \beta \dots \textcircled{4}$$

## ◆ 正弦と余弦の加法定理から正接へ

三角関数の相互関係の式から  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  なので、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}, \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$$

とかける。

それぞれの式を計算すると

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta} \end{aligned}$$

分子分母を  $\cos \alpha \cos \beta$  で割ると

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \dots \textcircled{5}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \beta}$$

分子分母を  $\cos \alpha \cos \beta$  で割ると

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \dots \textcircled{6}$$