



# 対数の基本事項の確認

★ 対数の関わる問題の特徴をしっかりと覚えよう！

$a > 0, a \neq 0, M > 0$  のとき

$$a^p = M \Leftrightarrow \log_a M = p$$

## 対数の性質

$a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1, M > 0, N > 0, k$  は実数

- ①  $\log_a a = 1$  (底と真数が同じなら1)
- ②  $\log_a 1 = 0$  (真数が1なら0)
- ③  $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$  (積  $\Leftrightarrow$  和)
- ④  $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$  (商  $\Leftrightarrow$  差)
- ⑤  $\log_a M^k = k \log_a M$  ( $k$  乗  $\Leftrightarrow k$  倍)

特に

$$\log_a \frac{1}{N} = \log_a N^{-1} = -\log_a N$$

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \log_a M^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a M$$

## 底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

特に

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$
 (底と真数の反転)

$$\log_a b^k = \frac{k}{r} \log_a b$$
 (指数の抽出)

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$
 (log の連結)

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$$
 (log の循環)

## 指数にある対数

log の係数 1

$$a^{\log_a M} = M$$

↑ 同じ

- (証)  $a^{\log_a M} = x$  とおく
- 両辺に対数をとると  $\log_a a^{\log_a M} = \log_a x$
- 整理すると  $\log_a M = \log_a x$
- 真数より  $M = x$
- よって  $a^{\log_a M} = M$

## 大小関係

$a > 1$  のとき,  $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

$0 < a < 1$  のとき,  $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

特に  $a > 1, M > 0$  のとき

$$\log_a x < \log_a y < \log_a z \Leftrightarrow x < y < z$$

$$\log_x M < \log_y M < \log_z M \Leftrightarrow x > y > z (M > 1)$$

$$x < y < z (M < 1)$$

また  $a \neq 1, a > 0$  のとき  $(0 <) x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$

底が1より大きい  $\Leftrightarrow$  大小そのまま

底が1より小さい  $\Leftrightarrow$  不等号反転

底, 定数が等しいとき, 真数に注目

真数が等しいとき, 底に注目

いろいろな場面で活用を

## 方程式

- ① 真数条件・底の条件の確認
- ②  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  の形への変形
- ③ 真数の比較  $f(x) = g(x)$  へ変形して解く
- ④ ①の条件との吟味

特に  $f(\log_a x) = 0$  の形の式は  $\log_a x = t$  などのおきかえを

**注** 真数条件, 底の条件を忘れずに

方程式や不等式, 最大・最小の問題では, まず第一に真数条件や底の条件の吟味をすること!

## 不等式

- ① 真数条件・底の条件の確認
- ②  $\log_a f(x) < \log_a g(x)$  などの形への変形
- ③  $a > 1$  のとき,  $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
- ④  $0 < a < 1$  のとき,  $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
- ④ ①の条件との吟味

**注** おきかえたら範囲の吟味を

方程式や不等式, 最大・最小の問題などでおきかえを用いた場合は, 必ずおきかえた文字の範囲を考えること。これはほかの場面でも同じ!

## 最大・最小

- (i) おきかえで多項式化
- (ii)  $f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow y = g(x)$  を見る
- (iii) 和 $\Leftrightarrow$ 積の変換などを活用して式を整理する
- (iv) 正の数の2項なら, 相加相乗平均も利用する