



1次不定方程式の特殊解の確認

★ 1次不定方程式の解法の基本もしっかりおさえておこう！

344x+149y=1の整数解をすべて求めよ

教科書の解法

(*)

$$\begin{cases} 344x+149y=1 & \dots ① \\ 344 \text{ と } 149 \text{ に互除法の計算を行うと} \\ 344=149 \cdot 2+46 & \text{移項すると } 46=344-149 \cdot 2 \\ 149=46 \cdot 3+11 & \text{移項すると } 11=149-46 \cdot 3 \\ 46=11 \cdot 4+2 & \text{移項すると } 2=46-11 \cdot 4 \\ 11=2 \cdot 5+1 & \text{移項すると } 1=11-2 \cdot 5 \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 2 \cdot 5 \\ &= 11 - (46 - 11 \cdot 4) \cdot 5 \\ &= 11 \cdot 21 + 46 \cdot (-5) \\ &= (149 - 46 \cdot 3) \cdot 21 + 46 \cdot (-5) \\ &= 149 \cdot 21 + 46 \cdot (-68) \\ &= 149 \cdot 21 + (344 - 149 \cdot 2) \cdot (-68) \\ &= 344 \cdot (-68) + 149 \cdot 157 \end{aligned}$$

すなわち $344 \cdot (-68) + 149 \cdot 157 = 1 \dots ②$

ゆえに整数解の1つは $x = -68, y = 157$

①-②より $344(x+68)+149(y-157)=0$

すなわち $344(x+68)=-149(y-157) \dots ③$

344と149は互いに素であるから、 $x+68$ は149の倍数である。よって k を整数として、 $x+68=149k$ と表される。

これを③に代入すると

$$344 \cdot 149k = -149(y-157) \quad \text{すなわち } y-157=344k$$

したがって、求める整数解は

$$x=149k-68, y=-344k+157 \quad (k \text{ は整数})$$

教科書などの解法では整数解の1つ(特殊解)を求める(*)の過程は省略されることが多い。そこでこの過程をもう少し効率よく解く方法を考えてよう。

その1) 互除法表+逆行表

互除法表		344	149	
① $149 \times 2 = 298$ なので	2	298	138	3
$344 - 298 = 46$		46	11	
② $46 \times 3 = 138$ なので	4	44	10	5
$149 - 138 = 11$		2	1	

差が1になるまで繰り返す

逆行表

① 互除法表で1が出た方に1を書き、商の符号を変えたものを逆順、逆側に書く	-5	-5	1	-4
② $1 \times (-5) = -5$ を書く	-3	-63	21	
③ $-5 \times (-4) = 20$ を書く		-68	136	-2
④ 上下に2個そろったら足し算 $1+20=21$ を書く			157	
⑤ $21 \times (-3) = -63$ を書く				
⑥ 上下に2個そろったら足し算 $-5-63=-68$ を書く				
⑦ $-68 \times (-2) = 136$ を書く				
⑧ 上下に2個そろったら足し算 $21+136=157$ を書く				
⑨ 特殊解は $x = -68, y = 157$				

その2) 筆算+逆行表改

筆算

① $344 \div 149$ を筆算で行う	$2 \overline{)11} \overline{)46} \overline{)149} \overline{)344}$
② 余り46で149を割る	$\underline{10} \quad \underline{44} \quad \underline{138} \quad \underline{298}$
余りが1になるまで繰り返す	$1 \quad 2 \quad 11 \quad 46$

逆行表改

① 1段目は0、2段目は方程式の右辺の数を書く	0	-5	-5
② 筆算での商を、符号を変え逆順に並べる	-5	-4	20
③ 左列と中央列を掛け右列に書く	-3	21	-63
④ 中央列と右列1段下の和を中央列さらに1段下に書く(③④繰り返し)	-2	-68	136
		157	

その3) 筆算+順行表

筆算

	x	y	
その2と同様に行う	1	0	
順行表	2	0	1
① xの係数が大きいので	3	1	-2
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を書き込む	4	-3	7
	5	13	-30
② [n行の係数]		-68	157

= [(n-2)行の係数] - [(n-1)行の係数 × 商] を行い、商がなくなるまで繰り返す

※ 各方法の注意点を実際の問題を通じて確認しておこう。

$86x + 31y = 3$ の特殊解を1つ求めよ (右辺が1ではない)

その1) 互除法表+逆行表

互除法表	86	31	
2	62	24	1
	24	7	
3	21	6	2
	3	1	
逆行表		3	
-2	-6	18	-3
-1	-21	21	
	-27	54	-2
		75	

$x = -27, y = 75$

※ 1段目を右辺の値から

その2) 筆算+逆行表改

筆算	2	3	1	2
	3)7	24	31	86
		6	21	24
			6	62
		1	3	7
				24
逆行表改	×		+	
		0		
	-2	3		-6
	-3	-6		18
	-1	21		-21
	-2	-27		54
				75

$x = -27, y = 75$

※ 2段目を右辺の値から

その3) 筆算+順行表

筆算	2	3	1	2
	3)7	24	31	86
		6	21	24
			6	62
		1	3	7
				24
順行表		x		y
		1		0
2		0		1
1		1		-2
3		-1		3
2		4		-11
		-9		25
x3		-27		75

$x = -27, y = 75$

※ 最後に右辺の値を掛ける

$29x + 63y = 1$ の整数解をすべて求めよ (yの係数のほうが大きい)

その1) 互除法表+逆行表

互除法表	29	63	
5	25	58	2
	4	5	
		4	1
		1	
逆行表		1	
-1	-1	5	-5
-2	-12	6	
	-13		

$x = -13, y = 6$

※ 通常どおり

その2) 筆算+逆行表改

筆算	1	5	2
	4)5	29	63
		4	25
			58
		1	4
			5
逆行表改	×		+
		0	
	-1	1	
	-5	-1	
	-2	6	
			-12
			-13

$x = -13, y = 6$

※ 最後ひっくり返す

その3) 筆算+順行表

筆算	1	5	2
	4)5	29	63
		4	25
			58
		1	4
			5
順行表		x	
		0	
2		1	
5		-2	
1		11	
		-13	
			6

$x = -13, y = 6$

※ 最後に右辺の値を掛ける

$93x - 65y = 2$ の整数解をすべて求めよ (片方が負の係数を持つ)

その1) 互除法表+逆行表

互除法表	93	65	
1	65	56	2
	28	9	
3	27		
	1		
逆行表	(x)	(-y)	
	2		
-2	12	-6	-3
	14	-14	-1
		-20	

$x = 14, y = 20$

※ $93x + 65(-y) = 2$ とみる

その2) 筆算+逆行表改

筆算	3	2	1
	9)28	65	93
		27	56
			65
		1	9
			28
逆行表改	×		+
		0	
	-3	2	
	-2	-6	
	-1	14	
			-14
			-20

$x = 14, y = 20$

※ $93x + 65(-y) = 2$ とみる

その3) 筆算+順行表

筆算	3	2	1
	9)28	65	93
		27	56
			65
		1	9
			28
順行表		x	
		1	
1		0	
2		1	
3		-2	
		7	
x2		14	
			-20

$x = 14, y = 20$

※ $93x + 65(-y) = 2$ とみる