

1 学習内容の説明 ⇒ 2 問題演習 ⇒ 3 振り返り(確認テスト・相互採点・リフレクションの記入)

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】期待値を求められるようになる

□確率変数の期待値

1000本のくじがあり、その賞金および本数は

右の表のようになっている。

このくじを1本引くとき、期待できる賞金の額を考えてみよう。

このくじ1000本の賞金の総額は

$$10000 \cdot 1 + 1000 \cdot 5 + 100 \cdot 50 + 0 \cdot 944$$

である。これを、くじの総数で割ると

$$\frac{1}{1000} (10000 \cdot 1 + 1000 \cdot 5 + 100 \cdot 50 + 0 \cdot 944) = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

となる。この値は、くじ1本あたりの賞金額の平均である。

すなわち、くじを1本引くときに期待できる賞金額は20円と考えられる。

	賞金	本数
1等	10000円	1本
2等	1000円	5本
3等	100円	50本
はずれ	0円	944本
計		1000本

このことは、次のように考えることもできる。

このくじを1本引くときに得る賞金をX円とすると、確率変数Xの確率分布は次の表のようになる。

X	10000	1000	100	0	計
P	$\frac{1}{1000}$	$\frac{5}{1000}$	$\frac{50}{1000}$	$\frac{944}{1000}$	1

縦に掛けて
横に足す

ここで、等式①を分配して整理すると、次のように書き表すこともできる。

$$10000 \cdot \frac{1}{1000} + 1000 \cdot \frac{5}{1000} + 100 \cdot \frac{50}{1000} + 0 \cdot \frac{944}{1000} = 20$$

したがって、この等式の左辺は、賞金の額とそれが当たる確率の積をすべて加えたものになっていることがわかる。

確率変数Xの確率分布が下の表で与えられているとする。

X	x_1	x_2	……	x_n	計
P	p_1	p_2	……	p_n	1

縦に掛けて
横に足す

このとき

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

期待値は数学Aでも出てきたが
 $E(X)$ や Σ を用いてはいなかった

を、Xの期待値 または 平均 といい、 $E(X)$ または m で表す*。

$E(X)$ のEは、
期待値を意味する英語
expectationの頭文字である。
mは平均を意味する英語
meanの頭文字である。

確率変数の期待値

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

例1) 2枚の硬貨を同時に投げるとき、表が出る硬貨の枚数 X の期待値を求める。

X の確率分布は右の表ようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

よって、 X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

縦に掛けて
横に足す

終

例2) 1個のさいころを投げるとき、出る目 X の期待値を求める。

X の確率分布は、次の式で表される。

$$P(X=k) = \frac{1}{6} \quad (k=1, 2, \dots, 6)$$

確率分布を式で表すこともある。

よって、 X の期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^6 \left(k \cdot \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

$n=6, x_k=k, p_k=\frac{1}{6}$ とみる

$$\Sigma \text{ の公式 } \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

終

表でかくと...

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} (1+2+3+4+5+6) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 21 \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$