

1 学習内容の説明 ⇒ 2 問題演習 ⇒ 3 振り返り(確認テスト・相互採点・リフレクションの記入)

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】確率変数の変形が、どのように影響するか考え求められるようになろう

□ $aX + b$ の期待値

確率変数 X の確率分布が右の表のように与えられているとする。 a, b を定数とすると、 X に対して $aX + b$ も確率変数であり、その分布は次のようになる。

X	x_1	x_2	……	x_n	計
P	p_1	p_2	……	p_n	1



確率は変わらない	$aX + b$	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	……	$ax_n + b$	計
	P	p_1	p_2	……	p_n	1

よって、 $aX + b$ の期待値は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 E(aX + b) &= \sum_{k=1}^n (ax_k + b)p_k && \text{Σを分配} \\
 &= a \left[\sum_{k=1}^n x_k p_k \right] + b \left[\sum_{k=1}^n p_k \right] && \begin{cases} \sum_{k=1}^n x_k p_k = E(X) \\ \sum_{k=1}^n p_k = 1 \end{cases} \\
 &= aE(X) + b
 \end{aligned}$$

したがって、次のことが成り立つ。

$aX + b$ の期待値

X を確率変数、 a, b を定数とすると

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

とくに、 $E(aX) = aE(X)$ である。

もとの変数を a 倍して b 足すと期待値(平均)も a 倍して b 足すと求められる

例3) 1個のさいころを投げて出る目を X とすると、例2により $E(X) = \frac{7}{2}$ である。

このとき、確率変数 $2X + 1$ の期待値は

$$E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = 2 \cdot \frac{7}{2} + 1 = 8 \quad \text{○}$$

【別解】 確率分布は次の表のようになるので

X	1	2	3	4	5	6	
$2X + 1$	3	5	7	9	11	13	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(2X + 1) = 3 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 7 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 11 \cdot \frac{1}{6} + 13 \cdot \frac{1}{6} = 48 \cdot \frac{1}{6} = 8$$

□ X^2 の期待値

確率変数 X に対して、 X^2 もまた確率変数である。
 X の確率分布が右の表で与えられるとき、
 X^2 の期待値は、次の式によって求められる。

X	x_1	x_2	……	x_n	
X^2	x_1^2	x_2^2	……	x_n^2	計
P	p_1	p_2	……	p_n	1

$$E(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n \quad \text{より}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k$$

例4) 1個のさいころを投げて出る目を X とするとき、 X^2 の期待値は

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^6 \left(k^2 \cdot \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k^2 \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 \quad \left(\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right) \\ &= \frac{91}{6} \quad \text{終} \end{aligned}$$

別解 確率分布は次の表のようになるので

X	1	2	3	4	5	6	
X^2	1	4	9	16	25	36	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} = 91 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$