# 統計的な推測【確率変数の分布と標準偏差】　p.58～60

1 学習内容の説明 ⇒ 2 問題演習 ⇒ 3 振り返り（確認テスト・相互採点・リフレクションの記入）

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】確率分布や期待値を用いて分散の値を求められるようになろう

## □確率変数の分散と標準偏差

同じ期待値をもつ確率変数であっても，その分布は同じとは限らない。
値が期待値の近くに集中している分布もあれば，値が期待値から遠くに散らばっている分布もある。

ここでは，確率変数 $X$ のとる値が，$X$ の期待値からどの程度散らばっているかを表す量について考えよう。

$X$ の確率分布が右の表で与えられ，その期待値が $m$ であるとする。

期待値＝平均

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | …… | $x_n$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | …… | $p_n$ | 1 |

このとき，$X$ の各値と $m$ とのへだたりの程度を表す量として

$$(x_1-m)^2,\ (x_2-m)^2,\ (x_3-m)^2,\ \cdots\cdots,\ (x_n-m)^2$$

が考えられ，$(X-m)^2$ はこれらの値をとる確率変数である。

これは
（平均との差）の２乗
つまり
（偏差）の２乗
この平均を求めれば
分散を求めることができる
（基本数Ⅰと同じ！）

確率変数 $(X-m)^2$ の期待値 $E((X-m)^2)$ を，
確率変数 $X$ の **分散** といい，$V(X)$ で表す。

$V(X)$ の $V$ は，分散を意味する英語 variance の頭文字である。

すなわち，$V(X)$ は次の式で表される。

$$V(X)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

また，和の記号 $\sum$ を使って表すと，次のようになる。

$$V(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k \quad \cdots\cdots ①$$

**確率変数の分散**

$$V(X)=E((X-m)^2)$$

偏差の２乗の期待値（平均）

$$=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k$$

**例5）** 2 枚の硬貨を同時に投げるとき，表が出る硬貨の枚数 $X$ について，
期待値 $m$ は，$m=1$ である。
よって，$X$ の分散は

$$V(X)=(0-1)^2\cdot\frac{1}{4}+(1-1)^2\cdot\frac{2}{4}+(2-1)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$ 終

| $X$ | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| $(X-m)^2$ | 1 | 0 | 1 | 計 |
| $P$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

$p_k$ が規則性がないので地道に計算

# 統計的な推測【確率変数の分布と標準偏差】　p.58〜59

$X$ の分散を表す前ページの式 ① の右辺を変形してみよう。

$$V(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(x_k{}^2-2mx_k+m^2)p_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2p_k-2m\sum_{k=1}^{n}x_kp_k+m^2\sum_{k=1}^{n}p_k$$
$$=E(X^2)-2m\cdot m+m^2\cdot 1$$
$$=E(X^2)-m^2$$

$\sum_{k=1}^{n}x_kp_k=m$

$\sum_{k=1}^{n}p_k=1$

ここで，$m=E(X)$ であるから，次の等式が成り立つ。

**分散と期待値**
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

($X$ の分散)
$=(X^2$ の期待値$)-(X$ の期待値$)^2$
２乗の期待値 − 期待値の２乗

数学Ｉでは
($X$ の分散)
$=(X^2$ の平均$)-(X$ の平均$)^2$
２乗の平均 − 平均の２乗

**例６）**　１個のさいころを投げて出る目 $X$ の分散 $V(X)$ を求める。

56 ページの例２により $E(X)=\dfrac{7}{2}$，　期待値

57 ページの例４により $E(X^2)=\dfrac{91}{6}$　２乗の期待値

であるから　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\dfrac{91}{6}-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{35}{12}$　終

分散 $V(X)$ は確率変数 $(X-m)^2$ の期待値であるから，$X$ の測定単位が，たとえば cm であるとき，$V(X)$ の単位は $\mathrm{cm}^2$ となる。そこで，$X$ の測定単位と同じ単位である $\sqrt{V(X)}$ を散らばりの度合いを表す数値として用いることも多い。$\sqrt{V(X)}$ を $X$ の **標準偏差** といい，$\boldsymbol{\sigma}(X)$ で表す。

**確率変数の標準偏差**
$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

数Ｉのとき同様 $\sqrt{(分散)}$
$\sqrt{V(X)}$ は $V(x)$ の正の平方根

$\sigma(X)$ の $\sigma$ はギリシャ文字の小文字で「シグマ」と読む。
標準偏差を意味する英語は standard deviation であり，その頭文字 s に相当するギリシャ文字が $\sigma$ である。

**例７）**　１個のさいころを投げて出る目 $X$ の標準偏差 $\sigma(X)$ を求める。

例６ により $V(X)=\dfrac{35}{12}$ であるから

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{35}{12}}=\frac{\sqrt{105}}{6}$$　終

確率変数 $X$ の期待値，分散，標準偏差を，それぞれ $X$ の分布の **平均，分散，標準偏差** ともいう。

標準偏差 $\sigma(X)$ は，$X$ の分布の平均 $m$ を中心として，$X$ のとる値の散らばる傾向の程度を表している。標準偏差 $\sigma(X)$ の値が小さいほど，$X$ のとる値は，平均 $m$ の近くに集中する傾向にある。