

1 学習内容の説明 ⇒ 2 問題演習 ⇒ 3 振り返り(確認テスト・相互採点・リフレクションの記入)

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】確率分布や期待値を用いて分散の値を求められるようになるう

□同時分布

例9) 大小2個のさいころを投げるとき、それぞれのさいころの出る目を、 X, Y とする。

大小2個のさいころを投げるという試行で、 X, Y の値が定まる。 総

例10) 同じ大きさの玉10個が入った袋があり、そのうちの4個には1、6個には2と書いてある。

最初に1個を取り出し、その玉に書いてある値を X とする。最初に取り出した玉をもどさないで、2個目を取り出し、その玉に書いてある値を Y とする。このように2個の玉を取り出すという試行で、 X, Y の値が定まる。 総

ある試行によって X, Y の値が定まるとき、 $X=a$ かつ $Y=b$ である確率を $P(X=a, Y=b)$ と表す。例10)では

$$P(X=1, Y=1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}, \quad P(X=1, Y=2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

$$P(X=2, Y=1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}, \quad P(X=2, Y=2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{15}$$

である。このとき、 X のみに着目すると

$$P(X=1) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15}, \quad P(X=2) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15}$$

であり、 X は確率変数である。また、 Y のみに着目すると

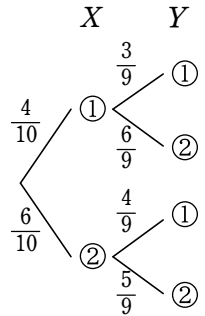
$$P(Y=1) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15}, \quad P(Y=2) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15}$$

であり、 Y も確率変数である。

例10)の確率変数 X, Y の確率分布は、右のように表される。この対応を X, Y の同時分布という。2つの確率変数を扱うときは、このような同時分布を考えている。

この表から、 X と Y のそれぞれの確率分布は、次の表で与えられる。

数学Aでは樹形図などで処理していたところ



$X \setminus Y$	1	2	計	X	1	2	計
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	P	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$	1
2	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{9}{15}$	Y	1	2	計
計	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$	1	P	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$	1

□確率変数の和の期待値

2つの確率変数 X, Y の同時分布が、右の表で与えられているとき、 $Z=X+Y$ とすると、 Z もまた確率変数である。

たとえば、 $X=x_1, Y=y_1$ のとき $Z=x_1+y_1$ で、その確率は p_{11} であるから、 Z の期待値は次のように表される。

$$\begin{aligned} E(Z) &= (x_1+y_1)p_{11} + (x_1+y_2)p_{12} + (x_2+y_1)p_{21} + (x_2+y_2)p_{22} \\ &= x_1(p_{11}+p_{12}) + x_2(p_{21}+p_{22}) + y_1(p_{11}+p_{21}) + y_2(p_{12}+p_{22}) \end{aligned}$$

ここで $E(X) = x_1(p_{11}+p_{12}) + x_2(p_{21}+p_{22})$, $E(Y) = y_1(p_{11}+p_{21}) + y_2(p_{12}+p_{22})$

であるから、 $E(Z) = E(X) + E(Y)$ が成り立つ。

$X \setminus Y$	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	$p_{11}+p_{12}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$p_{21}+p_{22}$
計	$p_{11}+p_{21}$	$p_{12}+p_{22}$	1

一般に、次のことが成り立つ。

確率変数の和の期待値

2つの確率変数 X, Y について $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

例11) 大小2個のさいころを投げるとき、それぞれのさいころの出る目を、 X, Y とする。

このとき、

$$E(X) = E(Y) = \frac{7}{2} \quad \leftarrow \text{例2より}$$

であるから、出る目の和 $X+Y$ の期待値は

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7 \quad \text{〇}$$

3つ以上の確率変数の和の期待値についても、2つの場合と同様なことが成り立つ。たとえば、3つの確率変数 X, Y, Z について、次のことが成り立つ。

$$E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z)$$

例12) 大中小3個のさいころを投げるとき、それぞれのさいころの出る目を X, Y, Z とする。

このとき、出る目の和 $X+Y+Z$ の期待値は、例11と同様に考えて

$$\begin{aligned} E(X+Y+Z) &= E(X) + E(Y) + E(Z) \\ &= \frac{7}{2} + \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{21}{2} \quad \text{〇} \end{aligned}$$

□ $aX + bY$ の期待値

2つの確率変数 X, Y と定数 a, b について、 $aX + bY$ も確率変数であり、次のことが成り立つ。

X, Y を確率変数、 a, b を定数とするとき

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$E(aX + bY)$$

$$= E(aX) + E(bY)$$

$$= aE(X) + bE(Y)$$

係数は外へ、足し算引き算はばらしてOK

応用例題1)

500円硬貨1枚と100円硬貨1枚を同時に投げて、表の出た硬貨の金額の和を Z 円とする。

Z の期待値を求めよ。

方針 表の出た500円硬貨100円硬貨の枚数をそれぞれ X, Y とすると、 $Z = 500X + 100Y$ と表される。

解答 この試行で、表の出た500円硬貨、100円硬貨の枚数を、それぞれ X, Y とする。

X, Y の確率分布は、どちらも右の表のようになる。

よって $E(X) = E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$Z = 500X + 100Y$ であるから、 Z の期待値は

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(500X + 100Y) = 500E(X) + 100E(Y) \\ &= 500 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot \frac{1}{2} = 300 \end{aligned}$$

表の枚数	0	1	計
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

係数は外へ、
足し算引き算はばらしてOK