統計的な推測【独立な２つの確率変数の積の期待値・和の分散】 p.66～69

１学習内容の説明 ⇒ ２問題演習 ⇒ ３振り返り（確認テスト・相互採点・リフレクションの記入）

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】独立であるときに何が成立するか理解して計算ができるようになろう。

□独立な２つの確率変数の積の期待値

２つの確率変数 X，Y を考える。X のとる値 a と Y のとる値 b に対して，

$$P(X=a,\ Y=b)=P(X=a)\cdot P(Y=b)$$

数学Ａでも出てきた話

が，a，b のとり方に関係なく常に成り立つとき，確率変数 X，Y は互いに **独立** であるという。とくに，２つの試行 S と T が独立のとき，S の結果によって定まる確率変数 X と T の結果によって定まる確率変数 Y は独立である。

２つの確率変数 X，Y が互いに独立で，その同時分布が右の表で与えられているとき，積 XY もまた確率変数である。
この X，Y に対して，積 XY の期待値は，次のように計算される。

X \ Y	y_1	y_2	計
x_1	p_1q_1	p_1q_2	p_1
x_2	p_2q_1	p_2q_2	p_2
計	q_1	q_2	1

$$\begin{aligned} E(XY)&=x_1y_1\cdot p_1q_1+x_1y_2\cdot p_1q_2+x_2y_1\cdot p_2q_1+x_2y_2\cdot p_2q_2\\ &=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1+y_2q_2)\\ &=E(X)E(Y)\end{aligned}$$

一般に，確率変数 X，Y について，次のことが成り立つ。

独立なら
期待値は、掛けて出せる

独立な２つの確率変数の積の期待値
２つの確率変数 X，Y が互いに独立であるとき　$E(XY)=E(X)E(Y)$

例１３） 大小２個のさいころを投げて，それぞれの出る目を X，Y とする。
このとき，X，Y は互いに独立であるから，積 XY の期待値は

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{4}$$ 終

注意 和 $X+Y$ の期待値は独立とは無関係

□独立な２つの確率変数の和の分散

２つの確率変数 X，Y が互いに独立であるとき，和 $X+Y$ の分散を求めてみよう。
「分散と期待値」の式によると

$$V(X+Y)=E((X+Y)^2)-\{E(X+Y)\}^2 \quad \cdots\cdots ①$$

である。ここで

$$E((X+Y)^2)=E(X^2+2XY+Y^2)=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)$$

$$\{E(X+Y)\}^2=\{E(X)+E(Y)\}^2=\{E(X)\}^2+2E(X)E(Y)+\{E(Y)\}^2$$

また，X，Y が互いに独立であるから　$E(XY)=E(X)E(Y)$

以上から，① の $V(X+Y)$ は次のように表される。

$$V(X+Y)=[E(X^2)-\{E(X)\}^2]+[E(Y^2)-\{E(Y)\}^2]=V(X)+V(Y)$$

したがって，確率変数 X，Y について，次のことが成り立つ。

独立なら
分散は、それぞれの和で出せる

独立な２つの確率変数の和の分散
２つの確率変数 X，Y が互いに独立であるとき

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

統計的な推測【独立な２つの確率変数の積の期待値・和の分散】 p.66～69

例１４） 大小２個のさいころを投げて，それぞれの出る目を X，Y とすると，
X，Y は互いに独立である。

例６ により　　$V(X)=V(Y)=\dfrac{35}{12}$

独立なら
分散もそれぞれの和で出せる

よって，和 $X+Y$ の分散は　$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\dfrac{35}{12}+\dfrac{35}{12}=\dfrac{35}{6}$

また，和 $X+Y$ の標準偏差は　$\sigma(X+Y)=\sqrt{V(X+Y)}=\sqrt{\dfrac{35}{6}}=\dfrac{\sqrt{210}}{6}$　終

標準偏差は $\sqrt{(分散)}$

□３つ以上の確率変数の独立

３つ以上の確率変数の独立についても，２つの場合と同様に定義する。
たとえば，３つの確率変数 X，Y，Z について，X のとる値 a，Y のとる値 b，Z のとる値 c に対して，

$P(X=a,\ Y=b,\ Z=c)=P(X=a)\cdot P(Y=b)\cdot P(Z=c)$

が，a，b，c のとり方に関係なく常に成り立つとき，確率変数 X，Y，Z は互いに **独立** であるという。
３つの確率変数 X，Y，Z について，次のことが成り立つ。

確率変数 X，Y，Z が互いに独立であるとき

$E(XYZ)=E(X)E(Y)E(Z)$

$V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)$

独立なら３つ以上でも
期待値は掛けて出せる
分散はそれぞれの和で出せる

コラム　確率変数の積の分散

２つの確率変数 X，Y について，積 XY の分散 $V(XY)$ と X，Y の分散の積 $V(X)V(Y)$ にはどのような関係があるだろうか。

確認　２つの確率変数 X，Y が互いに独立で，それぞれの確率分布が
次の表で与えられているとき，$V(XY)$ と $V(X)V(Y)$ をそれぞれ求めてみよう。

X	1	3	計
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Y	2	4	計
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

一般の場合について，考えてみよう。２つの確率変数 X，Y について，
これらの積 XY の分散は　$V(XY)=E(X^2Y^2)-\{E(XY)\}^2$　……①
$E(X^2Y^2)$ や $E(XY)$ を扱いやすくするために，X，Y が互いに独立であるとしよう。このとき，確率変数 X^2，Y^2 も互いに独立である。したがって，① より　$V(XY)=E(X^2)E(Y^2)-\{E(X)\}^2\{E(Y)\}^2$　……②

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ より　$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$，

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$ より　$E(Y^2)=V(Y)+\{E(Y)\}^2$

この２つの式を②に代入すると

$$
\begin{aligned}
V(XY)&=E(X^2)E(Y^2)-\{E(X)\}^2\{E(Y)\}^2\\
&=[V(X)+\{E(X)\}^2]\cdot[V(Y)+\{E(Y)\}^2]-\{E(X)\}^2\{E(Y)\}^2\\
&=V(X)\cdot V(Y)\boxed{+V(X)\{E(Y)\}^2+V(Y)\{E(X)\}^2}
\end{aligned}
$$

まとめ　互いに独立な２つの確率変数 X，Y について，$V(XY)=V(X)V(Y)$ が成り立つのは
$\boxed{V(X)\{E(Y)\}^2+V(Y)\{E(X)\}^2}=0$ のとき
すなわち，$V(X)\{E(Y)\}^2=0$，$V(Y)\{E(X)\}^2=0$
のときである。