統計的な推測【標準正規分布・正規分布の応用】　p.78～80

1 学習内容の説明 ⇒ 2 問題演習 ⇒ 3 振り返り（確認テスト・相互採点・リフレクションの記入）

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】標準正規分布の考え方を理解しよう

□標準正規分布

a，b を定数とする。確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$aX+b$ は正規分布 $N(am+b,\ a^2\sigma^2)$ に従う確率変数であることが知られている。

> $Y=aX+b$ のとき
> $E(Y)=aE(X)+b$
> $V(Y)=a^2V(X)$

とくに，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従い，

Z の確率密度関数は，$f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ となる。正規分布 $N(0,\ 1)$ を **標準正規分布** という。

> 補足　$E(X)=m$，$\sigma(X)=\sigma$ より
> 確率変数 Z の期待値，標準偏差は
> $E(Z)=E\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\right)=E\left(\dfrac{1}{\sigma}\cdot X-\dfrac{m}{\sigma}\right)$
> $=\dfrac{1}{\sigma}\cdot m-\dfrac{m}{\sigma}=0$
> $\sigma(Z)=\sigma\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\right)=\sigma\left(\dfrac{1}{\sigma}\cdot X-\dfrac{m}{\sigma}\right)$
> $=\left|\dfrac{1}{\sigma}\right|\cdot\sigma=1$

> **正規分布と標準正規分布**
>
> 確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，
>
> $$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$
>
> とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

例１７）　確率変数 X が正規分布 $N(1,\ 2^2)$ に従うとき，

$m=1$，$\sigma=2$ より，　$\boxed{Z=\dfrac{X-m}{\sigma}}$

確率変数 $Z=\dfrac{X-1}{2}$

は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。　終

> このような変数変換を**標準化**するという

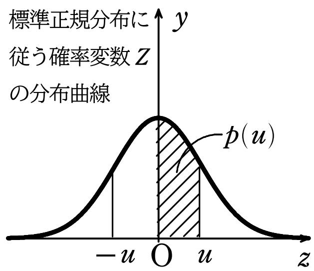
正規分布に従う確率変数 X に対して，確率 $P\ (a\leqq X\leqq b)$ などは標準正規分布を利用して求めることができる。

まずは，標準正規分布に従う確率変数について，具体的に確率を求める方法を調べてみよう。

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z に対し，確率 $P(0\leqq Z\leqq u)$ を教科書では $p(u)$ で表す。

> $P(Z\geqq u)$ を $p(u)$ と表すものもある

標準正規分布に従う確率変数 Z の分布曲線



$p(u)$ は右の図の斜線の部分の面積に等しい。

別紙には，いろいろな u の値に対する $p(u)$ の値を表にした「**正規分布表**」を載せた。

この表によると，たとえば

$P(0\leqq Z\leqq 1.23)=p(1.23)=0.3907$　である。

u	…………	.03
⋮		↓
1.2	⟶	0.3907
⋮		

$p(1.23)=0.3907$

また，次の等式が成り立つ。（$0\leqq u\leqq v$ とする）

$$\boxed{\begin{aligned}&P(-u\leqq Z\leqq 0)=P(0\leqq Z\leqq u)=p(u)\\&P(Z\leqq 0)=P(Z\geqq 0)=0.5\\&P(u\leqq Z\leqq v)=p(v)-p(u)\\&P(Z\leqq -u)=P(Z\geqq u)=0.5-p(u)\end{aligned}}$$

正規分布表

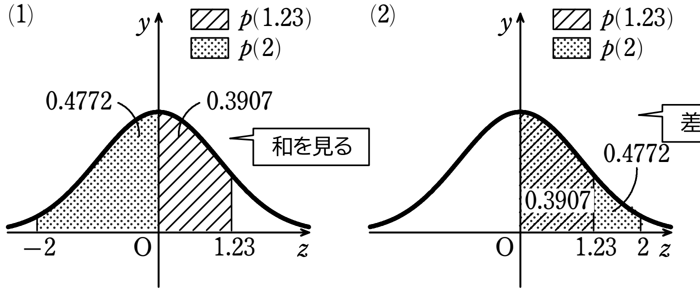
例１８） (1)　$P(-2 \leqq Z \leqq 1.23) = P(-2 \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq 1.23)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 2) + P(0 \leqq Z \leqq 1.23)$

$= p(2) + p(1.23) = \underline{0.4772 + 0.3907} = 0.8679$　正規分布表から

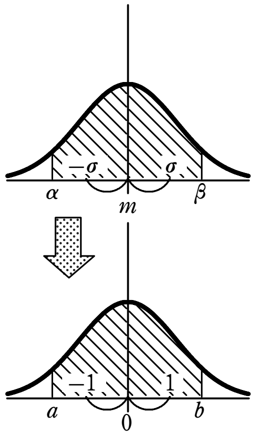
(2)　$P(1.23 \leqq Z \leqq 2) = P(0 \leqq Z \leqq 2) - P(0 \leqq Z \leqq 1.23)$

$= p(2) - p(1.23) = \underline{0.4772 - 0.3907} = 0.0865$　正規分布表から



終

例題３）　確率変数 X が正規分布 $N(4,\ 3^2)$ に従うとき，
確率 $P(1 \leqq X \leqq 7)$ を求めよ。



解答　$Z = \dfrac{X-4}{3}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X = 1$ のとき $Z = \dfrac{1-4}{3} = -1$，$X = 7$ のとき $Z = \dfrac{7-4}{3} = 1$

よって　$P(1 \leqq X \leqq 7) = P(-1 \leqq Z \leqq 1) = 2\,P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= 2p(1) = 2 \times 0.3413 = 0.6826$

□正規分布の応用

応用例題２） ある県における高校 2 年生の男子の身長の平均は 170.5 cm，標準偏差は 5.4 cm である。身長の分布を正規分布とみなすとき，この県の高校 2 年生の男子の中で，身長 178 cm 以上の人は約何%いるか。小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

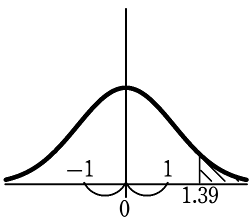
考え方　身長を X cm，$m = 170.5$，$\sigma = 5.4$ として，$Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$ を考える。

$P(X \geqq 178) = a$ のとき，$100a$ %の生徒がいることになる。

解答　身長を X cm とする。確率変数 X が正規分布 $N(170.5,\ 5.4^2)$ に従うとき，

$Z = \dfrac{X-170.5}{5.4}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X = 178$ のとき，$Z = \dfrac{178-170.5}{5.4} \fallingdotseq 1.39$ であるから



$P(X \geqq 178) = P(Z \geqq 1.39) = 0.5 - p(1.39)$

$= 0.5 - 0.4177 = 0.0823$

よって，約 8.2 %いる。　$0.0823 \times 100 = 8.23$