統計的な推測【標本平均の期待値と標準偏差】　p.90～92

1 学習内容の説明 ⇒ 2 問題演習 ⇒ 3 振り返り（確認テスト・相互採点・リフレクションの記入）

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】標本平均から母集団を推測する方法を整理していこう

母平均と標本平均、母標準偏差と標本の標準偏差の違いを理解しよう

□標本平均の期待値と標準偏差

母集団から大きさ n の無作為標本を抽出し，それらの変量 x の値を X_1，X_2，……，X_n とするとき，

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}$$

を **標本平均** という。n を固定すると，標本平均 $\overline{X}$ は 1 つの確率変数になる。

標本平均

例２１）　標本平均の確率分布と期待値

1，2 の数字が書いてあるカードが 50 枚ずつある。

この合計 100 枚のカードからなる母集団から，復元抽出によって大きさ 3 の無作為標本を抽出し，そのカードの数字を順に X_1，X_2，X_3 とする。

このとき，$X_1+X_2+X_3$ のとりうる値は 3，4，5，6 であるから，

標本平均 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$ のとりうる値は 1，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{5}{3}$，2 である。

$\overline{X}$ がそれぞれの値をとる確率を求めて，

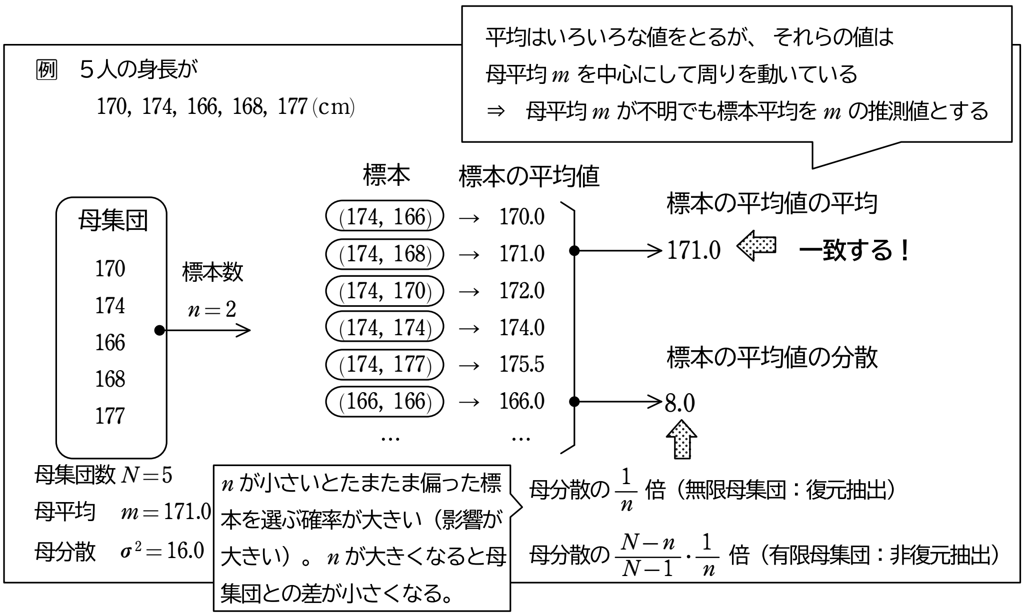
$\overline{X}$ の確率分布は右の表のようになる。

また，$\overline{X}$ の期待値 $E(\overline{X})$ は

$$E(\overline{X})=1\cdot\frac{1}{8}+\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

$\overline{X}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

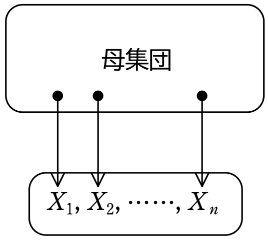
<補足>　例２１ の 100 枚のカードからなる母集団の母平均は $\dfrac{3}{2}$ である。



統計的な推測【標本平均の期待値と標準偏差】　p.90～92

標本平均 $\overline{X}$ の確率分布と母集団分布の関係を調べてみよう。
母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から，復元抽出によって大きさ n の無作為標本を抽出し，それらの変量 x の値を X_1，X_2，……，X_n とする。
各 X_k は，どれも大きさ 1 の標本で，
母集団分布に従う確率変数である。

互いに独立である



よって　$E(X_1)=E(X_2)=\cdots\cdots=E(X_n)=m$

$\sigma(X_1)=\sigma(X_2)=\cdots\cdots=\sigma(X_n)=\sigma$

したがって

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\{E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)\}$$
$$=\frac{1}{n}\cdot nm=m$$

【おさらい】
$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$
特に X_1, X_2, ……, X_nに対して
$E(X_1+\cdots+X_n)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)$
$V(aX)=a^2V(X)$
復元抽出のときは X_1, X_2, ……, X_n は互いに独立であり
$V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)$
$=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)$
$=n\sigma^2$

また，復元抽出の場合，
X_1，X_2，……，X_n は互いに独立な確率変数であるから

$$V(\overline{X})=V\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n^2}\{V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)\}$$
$$=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

$V(X_1)=V(X_2)=\cdots=V(X_n)=\sigma^2$

よって　$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\sigma>0$ に注意

これまでのことをまとめると，次のことがいえる。

標本平均の期待値と標準偏差

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，
その標本平均 $\overline{X}$ の期待値 $E(\overline{X})$ と標準偏差 $\sigma(\overline{X})$ は

$$\boldsymbol{E(\overline{X})=m,\quad \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

非復元抽出の場合も，標本の大きさ n に比べて母集団の大きさが十分大きいときは，復元抽出と同様に扱ってよいことが知られている。

例２２） 母平均 60，母標準偏差 5 の十分大きい母集団から，大きさ 25 の標本を抽出するとき，
その標本平均 $\overline{X}$ について

期待値は　$E(\overline{X})=60$

標準偏差は　$\sigma(\overline{X})=\dfrac{5}{\sqrt{25}}=\dfrac{5}{5}=1$　終