

1 学習内容の説明 ⇒ 2 問題演習 ⇒ 3 振り返り(確認テスト・相互採点・リフレクションの記入)

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】標本平均から母平均がどのような範囲にあるか推定しよう

母集団が非常に大きいとき、母平均の真の値を求めるにはかなりの時間と労力を要する。

ここでは、標本平均を用いて、母平均がどのような範囲にあるか推測する方法を考えよう。

【参考】母集団の特性値を推測する場合、一般に「点推定」と「区間推定」の2種類のもが用いられる。

「点推定」

標本の値から一定の計算によって求められる値を、母集団の未知の特性値に対する推定量とする方法。不偏推定量、バイズ推定量、最尤(さいゆう)推定量、一致推定量などがある。

「区間推定」

標本の値から計算によって求めた区間、すなわち、その中に母集団の特性値が含まれると期待できる区間を求める方法。利点としては、その区間がどの程度の正確さで推定しているかを明確にしていること。教科書で扱っているのはこの話。

□母平均の推定

92ページ

母平均 m 、母標準偏差 σ をもつ母集団から抽出された大きさ n の無作為標本の標本平均 \bar{X} は、 n が大きいとき、近似的に正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

すなわち、確率変数 $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は近似的に

標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

巻末の正規分布表によると

$$P(|Z| \leq 1.96) = 0.95 \quad \leftarrow \text{95\%になるところ}$$

であるから

$$P\left(|\bar{X} - m| \leq 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

よって、次の等式が成り立つ。

$$P\left(\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

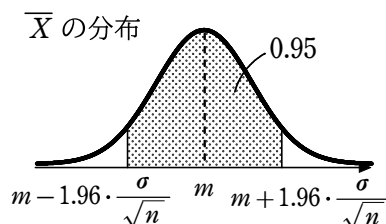
すなわち、不等式

$$\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \dots\dots \text{①}$$

の成り立つ確率は 0.95 である。

① で示される範囲を、母平均 m に対する **信頼度 95 % の 信頼区間** といい、次のように表す。

$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{閉区間 } [O, \Delta] \leftarrow \{x \mid O \leq x \leq \Delta\} \\ \text{开区間 } (O, \Delta) \leftarrow \{x \mid O < x < \Delta\} \end{array} \right.$$



$\left| \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \leq 1.96$ の両辺に $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} (> 0)$ をかける (不等式を解いて $-1.96 \leq \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96$ を変形するイメージでも)

まとめると、次のようになる。

母平均の推定

母標準偏差を σ とする。標本の大きさ n が大きいとき、
母平均 m に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

<注意> 「母平均 m に対して信頼度 95 % の信頼区間を求めること」を、
「母平均 m を信頼度 95 % で 推定 する」ということがある。

また、必要に応じて、

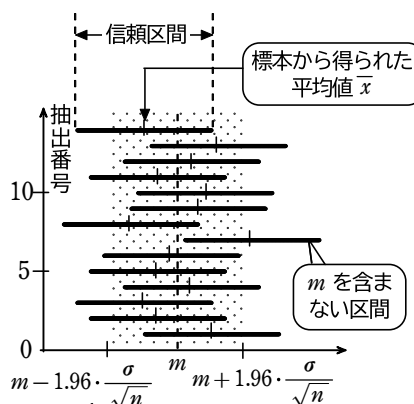
信頼度 99 % や 90 % の信頼区間を求めることがある。

信頼度 99 % の信頼区間を求める
場合は 1.96 が 2.58 となる

母平均 m に対する信頼度 95 % の信頼区間の意味を考えよう。

\bar{X} は確率変数であるから、標本から実際に得られる
平均値 \bar{x} は、抽出される標本によって異なる。

しかし、大きさ n の無作為標本を繰り返して抽出して、
得られた平均値から上のような信頼区間を多数作ると、
その中には m を含むものが 95 % あることが期待される。
これが、信頼度 95 % の信頼区間の意味である。



上で示した「母平均の推定」では、母標準偏差 σ を用いて、
母平均を推定しているが、実際には σ の値もわからない場合
が多い。標本の大きさ n が大きいときは、母標準偏差 σ の
代わりに標本の標準偏差 S を用いても差し支えないことが
知られている。

標本標準偏差 S を用いる場合は「 t -分布」を考える必要
があるが、この場合も n が大きいときは σ を S で代
用して得られる信頼区間はほぼ一致する

「信頼区間を 100 個作ると、
 m を含む区間が 95 個くらい
ある」ということ



信頼区間

例題 5) 大量に生産されたある製品の中から、400 個を無作為抽出して重さを量ったところ、
平均値 98.8 g、標準偏差 2.0 g であった。この製品の平均重量 m g に対して、信頼度 95 %
の信頼区間を求めよ。

解答 標本の平均値は $\bar{x} = 98.8$ 、標本の標準偏差は $S = 2.0$ 、
標本の大きさは $n = 400$ であるから

$$1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2.0}{\sqrt{400}} \doteq 0.2$$

よって、求める信頼区間は

$$[98.8 - 0.2, 98.8 + 0.2]$$

すなわち $[98.6, 99.0]$ ただし、単位は g

- ① 母標準偏差が不明のときは、代わりに標本の標準偏差 S を用いる。
- ② \bar{X} には確率変数 \bar{X} の実現地である標本の平均値 \bar{x} を用いる。

設問に合わせて小数第 2 位を四捨五入

<注意> 例題 5 で求めた信頼区間は「98.6 g 以上 99.0 g 以下」であるともいう。