

■ ■ □ 数列の帰納的定義 □ ■ ■

- (1) 初項 (2) 前の項から、その次に続く項を定める規則の2つを与えて数列を定めること。
 (2) の規則を式で示したものを**漸化式**という。

【1】等差数列型： $a_{n+1} = a_n + d \rightarrow a_{n+1} - a_n = d$ より公差 d の等差数列

例) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n - 3$

例) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} - a_n = 4$ のとき, $a_{40} = \square$

【2】等比数列型： $a_{n+1} = ra_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ より公比 r の等比数列

例) $a_1 = -3, 5a_{n+1} = 2a_n$

【3】変比数列型： $a_{n+1} = f(n)a_n \rightarrow n = 1, 2, 3, \dots$ を代入して辺々かける

例) $a_1 = 7, (n+2)a_{n+1} = na_n$

【4】階差数列型： $a_{n+1} = a_n + f(n) \rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \ (n \geq 2)$ と $n = 1$ の確認

例) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + n$

例) $a_1 = 3, a_{n+1} - a_n = 2^n$

【5】隣接2項間型①： $a_{n+1} = pa_n + q \rightarrow$ 特性方程式 $x = px + q$ を解いて等比数列を作る

例) $a_1 = 3, a_{n+1} = 4a_n + 3$

【6】指数型： $a_{n+1} = a_n^k \rightarrow$ 両辺の対数をとって隣接2項間型①に

例) $a_1 = 10, a_{n+1} = 10a_n^3$

● ● ○ 練習問題 ○ ● ●

- | | |
|---------------------------------------|------------------------------------|
| (1) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2$ | (2) $a_1 = -2, a_{n+1} = 2a_n$ |
| (3) $a_1 = 1, a_{n+1} = na_n$ | (4) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n^2$ |
| (5) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ | (6) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n - 1$ |
| (7) $a_1 = 2, 3a_{n+1} = 2a_n + 1$ | |

【7】隣接2項間型②: $a_{n+1} = pa_n + q^n \rightarrow$ 両辺を q^{n+1} でわって $\frac{a_n}{q_n} = b_n$ と
おいて隣接2項間型①に

例) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

【9】分数型①: $a_{n+1} = \frac{ra_n}{pa_n + q} \rightarrow$ 両辺の逆数をとって $\frac{1}{a_n} = b_n$ とおく

例) $a_1 = \frac{1}{4}, a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n + 5}$

【10】 S_n を含む漸化式型: $\rightarrow a_n = 1, a_n = S_n - S_{n+1} (n \geq 2)$ の利用

例) $a_1 = 1, a_{n+1} = S_n + (n+1)$ ただし $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

【8】隣接2項間型③: $a_{n+1} = pa_n + qn + r \rightarrow$ ①階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ を
② $\{a_n + \alpha n + \beta\}$ の等比数列へ

例) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 3n$

①の解き方

②の解き方

●●○ 練習問題 ○●●

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$

(2) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + (-2)^n$

(3) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n - 1$

(4) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3}$

【11】隣接3項間型①: $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ (重解をもたないタイプ)

→ ① $x^2 + px + q = 0$ の2つの解を α, β としたときに

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \quad \text{と変形して連立する}$$

② $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ とおいて, a_1, a_2 から A, B を求める

例) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

①の解き方

②の解き方

【12】隣接3項間型②: $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ (重解をもつタイプ)

$$\rightarrow a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \alpha a_n) \text{ 一本で解く}$$

例) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

【13】分数型②: $a_{n+1} = \frac{ra_n + s}{pa_n + q} \rightarrow$ うまく誘導にのるのがコツ

例) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{2a_n + 1}$ に対して

(1) $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ とおくと, 数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

●●○ 練習問題 ○●●

(1) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$

(2) $a_1 = 1, a_2 = 6, a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 0 (n \geq 3)$ をみたすとき

(i) a_n を a_{n-1} で表せ。 ($n \geq 2$)

(ii) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(i) すべての n に対して, $a_n \neq 3$ を示せ。

(ii) $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ とおくと, $\{b_n\}, \{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき,

$2a_n - S_n = 3^n (n = 1, 2, 3 \dots)$ となる関係がある。一般項を求めよ。

◆◆◇ 演習問題 ◇◆◆

1. 数列 $\{a_n\}$ が次の関係式をみたすとき、一般項 a_n を求めよ。

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 1$

(2) $a_0 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{3 + a_{n-1}}$

(3) $a_1 = 10, \sqrt[3]{\frac{a_{n+1}}{10}} = a_n$

(4) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + n - 1$

(5) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + (-2)^n$

(6) $x_1 = 1, x_2 = 5, x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1}$

(7) $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{5}, y_n y_{n-1} = 5y_{n+1} y_{n-1} - 6y_{n+1} y_n$

(8) $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = 3n^2 - 4n$

2. 数列 $\{a_n\}$ が、 $a_1 = \frac{1}{2}, \frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{2}{n+1} = 1$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) をみたすとき、

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ を求めよ。 (東京学芸大学)

3. $a_1 = 1, b_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + b_n, b_{n+1} = 2a_n + 4b_n$ で定められる $\{a_n\}, \{b_n\}$ がある。

(1) $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ をみたす α, β の組を 2 組求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ。 (三重大学)

4. p を 0 でない実数とする。数列 a_1, a_2, a_3, \dots を次のように定義する。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = pa_n + p^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) $|p| = 1$ のとき、 a_n を求めよ。

(2) $|p| \neq 1$ のとき、 a_n を求めよ。 (北海道大学・改)