exercise 【漸化式①】　　2年　組　番　名前

■■□　数列の帰納的定義　□■■

（1）初項　（2）前の項から，その次に続く項を定める規則
の２つを与えて数列を定めること。
（2）の規則を式で示したものを漸化式という。

【1】等差数列型：$a_{n+1}=a_n+d$ → $a_{n+1}-a_n=d$ より公差 d の等差数列

例）$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n-3$

$a_{n+1}-a_n=-3$ より 公差 -3

$a_n=2+(n-1)\cdot(-3)=\underline{-3n+5}$

例）$a_1=2$，$a_2=3$，$a_{n+2}-a_n=4$ のとき，$a_{40}=\boxed{}$

$a_{n+2}=a_n+4$

①　②$n=2$　③$n=4$　…　⑳

a_2　a_4　a_6　a_{40}

$3 \xrightarrow{+4} 7$　11　…　$\boxed{}$

b_1，b_2，b_3 … b_{20}

∴ $b_n=3+(n-1)4$
$=4n-1$

$a_{40}=b_{20}$
$=\underline{79}$

【2】等比数列型：$a_{n+1}=ra_n$ → $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ より公比 r の等比数列

例）$a_1=-3$，$5a_{n+1}=2a_n$

$a_{n+1}=\frac{2}{5}a_n$　∴ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2}{5}$ ← 公比.

よって　$a_n=-3\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

【3】変比数列型：$a_{n+1}=f(n)a_n$ → $n=1, 2, 3, \cdots$ を代入して辺々かける

例）$a_1=7$，$(n+2)a_{n+1}=na_n$

$n=1 \to \cancel{3a_2}=1\cdot a_1$
$n=2 \to \cancel{4a_3}=2\cancel{a_2}$
$n=3 \to \cancel{5a_4}=\cancel{3a_3}$
⋮
$n=n-2 \to n\cancel{a_{n-1}}=\cancel{(n-2)a_{n-2}}$
×) $n=n-1 \to (n+1)a_n=\cancel{(n-1)a_{n-1}}$
$n(n+1)a_n=1\cdot2\cdot a_1$

よって
$n(n+1)a_n=1\cdot2\cdot7$
$=14$

∴ $a_n=\dfrac{14}{n(n+1)}$

【4】階差数列型：$a_{n+1}=a_n+f(x)$ → $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$ $(n\geqq2)$ と $n=1$ の確認

例）$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+n$ → $a_{n+1}-a_n=n$.

$n\geqq2$ のとき
$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=3+\dfrac{(n-1)n}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+3$.

これは $a_1=3$ をみたす.

よって $a_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+3$

例）$a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=2^n$

$n\geqq2$ のとき
$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+1$

これは $a_1=3$ をみたす

よって　$a_n=2^n+1$

【5】隣接２項間型①：$a_{n+1}=pa_n+q$ → 特性方程式 $x=px+q$ を解いて等比数列を作る

例）$a_1=3$，$a_{n+1}=4a_n+3$

$x=4x+3$
$-3x=3$
∴ $x=-1$

$a_{n+1}-(-1)=4\{a_n-(-1)\}$
$a_{n+1}+1=4(a_n+1)$

$b_n=a_n+1$ とすると　$b_{n+1}=4b_n$ なので $\{b_n\}$ は
初項 $b_1=a_1+1=4$，公比4の等比数列
∴ $b_n=a_n+1=4\cdot4^{n-1}=4^n$
∴ $a_n=4^n-1$.

【6】指数型：$a_{n+1}=a_n^{\,k}$ → 両辺の対数をとって隣接２項間型①に

例）$a_1=10$，$a_{n+1}=10a_n^{\,3}$

$\log_{10}a_{n+1}=\log_{10}10a_n^3=\log_{10}10+3\log_{10}a_n$

ここで $\log_{10}a_n=b_n$ とすると　$b_1=\log_{10}10=1$.

$b_{n+1}=3b_n+1$　　$x=3x+1$
$b_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(b_n+\frac{1}{2}\right)$　　$x=-\frac{1}{2}$

$\{b_n+\frac{1}{2}\}$ は初項 $\frac{3}{2}$ 公比3の等比数列なので

$b_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot3^{n-1}=\frac{3^n}{2}$

$\log_{10}a_n=b_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$

∴ $a_n=10^{\frac{1}{2}(3^n-1)}$

●●○　練習問題　○●●

(1)　$a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2$
(2)　$a_1=-2$, $a_{n+1}=2a_n$
(3)　$a_1=1$, $a_{n+1}=na_n$
(4)　$a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+n^2$
(5)　$a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2n+1$
(6)　$a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n-1$
(7)　$a_1=2$, $3a_{n+1}=2a_n+1$

(1) $a_n=1+2(n-1)=\underline{2n-1}$.

(2) $a_n=-2\cdot2^{n-1}=\underline{-2^n}$

(3) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=n$　$n=1,2,\cdots(n-1)$ を代入して両辺かけると

$\dfrac{\cancel{a_2}}{a_1}\cdot\dfrac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}}=1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-1)$

∴ $\dfrac{a_n}{a_1}=\underline{a_n=(n-1)!}$

(4) $n\geqq2$ のとき
$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2=1+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$
これは $a_1=1$ をみたすので　$\underline{a_n=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+1}$

(5) $n\geqq2$ のとき
$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=1+2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}+(n-1)=n^2$
これは $a_1=1$ をみたすので　$\underline{a_n=n^2}$

(6) $x=3x-1$ より $x=\frac{1}{2}$
$a_{n+1}-\frac{1}{2}=3\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$
$\{a_n-\frac{1}{2}\}$ は初項 $a_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 公比3の等比数列
∴ $a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}=\dfrac{3^{n-1}}{2}$
よって $\underline{a_n=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}}$

(7) $3x=2x+1$ より $x=1$
$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$ なので　$a_{n+1}-1=\frac{2}{3}(a_n-1)$
$\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=1$ 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列
よって $a_n-1=1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
∴ $\underline{a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1}$

【7】隣接2項間型②：$a_{n+1}=pa_n+q^n$ → 両辺を q^{n+1} でわって $\frac{a_n}{q_n}=b_n$ とおいて隣接2項間型①に

例）$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3^n$

3^{n+1} でわると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2a_n}{3^{n+1}}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}$

ここで $\frac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと $b_1=\frac{a_1}{3}=\frac{1}{3}$, $b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}$

$x=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ ∴ $x=1$ より

$b_{n+1}-1=\frac{2}{3}(b_n-1)$ ← ※$\{b_n-1\}$は公比$\frac{2}{3}$の等比数列

∴ $b_n-1=(b_1-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

∴ $b_n=\frac{a_n}{3^n}=-\left(\frac{2}{3}\right)^n+1$

$a_n=-2^n+3^n$

【8】隣接2項間型③：$a_{n+1}=pa_n+qn+r$ →①階差数列 $b_n=a_{n+1}-a_n$ を ②$\{a_n+\alpha n+\beta\}$ の等比数列へ

例）$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n-3n$

①の解き方

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=2a_n-3n\\ -)\ a_n&=2a_{n-1}-3(n-1)\\ \hline a_{n+1}-a_n&=2(a_n-a_{n-1})-3 \end{aligned}$$

$a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})-3$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと

$b_1=a_2-a_1=2a_1-3-a_1=2-3-1=-2$

$b_{n+1}=2b_n-3$ ← ※$x=2x-3$ ∴ $x=3$

$b_{n+1}-3=2(b_n-3)$ ← ※$\{b_n-3\}$は公比2の等比数列

$b_n-3=(b_1-3)2^{n-1}=-5\cdot2^{n-1}$

∴ $b_n=a_{n+1}-a_n=-5\cdot2^{n-1}+3$

$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n&=1+\sum_{k=1}^{n-1}(-5\cdot2^{k-1}+3)\\ &=1-5\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+3(n-1)\\ &=3n-5\cdot2^{n-1}+3 \end{aligned}$$

これは $a_1=1$ をみたすので

$a_n=3n-5\cdot2^{n-1}+3$

②の解き方

移項↓ $a_{n+1}-\{p(n+1)+q\}=2\{a_n-(pn+q)\}$ をみたすp,qは

$a_{n+1}=2a_n-pn+p-q=\underbrace{2a_n-3n}_{与式}$ より $p=3,\ q=3$

よって与式の変形して

$a_{n+1}-\{3(n+1)+3\}=2\{a_n-(3n+3)\}$

ここで $\{a_n-(3n+3)\}$ は初項 $a_1-(3+3)=-5$ 公比2の等比数列なので

$a_n-(3n+3)=-5\cdot2^{n-1}$

∴ $a_n=3n+3-5\cdot2^{n-1}$

【9】分数型①：$a_{n+1}=\frac{ra_n}{pa_n+q}$ → 両辺の逆数をとって $\frac{1}{a_n}=b_n$ とおく

例）$a_1=\frac{1}{4},\ a_{n+1}=\frac{a_n}{4a_n+5}$

逆数をとると $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4a_n+5}{a_n}=\frac{5}{a_n}+4$

$\frac{1}{a_n}=b_n$ とおくと $b_1=\frac{1}{a_1}=4$, $b_{n+1}=5b_n+4$　※$x=5x+4$　$x=-1$

$b_{n+1}+1=5(b_n+1)$ ← $\{b_n+1\}$は公比5の等比数列

$b_n+1=(b_1+1)\cdot5^{n-1}=5^n$

∴ $b_n=\frac{1}{a_n}=5^n-1$

よって $a_n=\frac{1}{5^n-1}$

【10】S_n を含む漸化式型：→ $a_n=1, a_n=S_n-S_{n+1}\ (n\geqq2)$ の利用

例）$a_1=1,\ a_{n+1}=S_n+(n+1)$　ただし $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$n\geqq2$ のとき

$a_{n+1}-a_n=\{S_n+(n+1)\}-\{S_{n-1}+n\}$

$=\underline{S_n-S_{n-1}}+1=a_n+1$

∴ $a_{n+1}=2a_n+1$　※$x=2x+1$　$x=-1$

$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ で $a_2=S_1+2=a_1+2=3$

よって $a_n+1=(a_2+1)\cdot2^{n-2}=4\cdot2^{n-2}=2^n$

※(n−1)項 $(a_2+1),(a_3+1),\cdots,(a_n+1)$　×2　×2　×2　(n−2)回

∴ $a_n=2^n-1\ (n\geqq2)$

これは $a_1=1$ をみたす

よって $a_n=2^n-1$

●●○　練習問題　○●●

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$　(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n+(-2)^n$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+n-1$　(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$

(1) $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+1$ より $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$ ← 等差数列

∴ $\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_1}{2^1}+(n-1)\times1=1+n-1=n$

よって $a_n=n\cdot2^n$

(2) $\frac{a_{n+1}}{(-2)^{n+1}}=\frac{2a_n}{(-2)^{n+1}}+\frac{1}{-2}=-\frac{a_n}{(-2)^n}-\frac{1}{2}$

$\frac{a_n}{(-2)^n}=b_n$ とおくと $b_1=\frac{a_1}{-2}=-1$, $b_{n+1}=-b_n-\frac{1}{2}$　※$x=-x-\frac{1}{2}$　$x=-\frac{1}{4}$

$b_{n+1}+\frac{1}{4}=-\left(b_n+\frac{1}{4}\right)$ ← ※$\{b_n+\frac{1}{4}\}$は公比−1の等比数列

$b_n+\frac{1}{4}=\left(b_1+\frac{1}{4}\right)\cdot(-1)^{n-1}$

$=-\frac{3}{4}\cdot(-1)^{n-1}=\frac{3}{4}\cdot(-1)^n$

∴ $b_n=\frac{a_n}{(-2)^n}=\frac{3}{4}\cdot(-1)^n-\frac{1}{4}$

よって $a_n=(-2)^n\left\{\frac{3}{4}\cdot(-1)^n-\frac{1}{4}\right\}$

(3) $a_{n+1}-\{p(n+1)+q\}=2\{a_n-(pn+q)\}$

$a_{n+1}=2a_n-pn+p-q=2a_n+n-1$ ∴ $p=-1,\ q=0$

与式を変形して

$a_{n+1}+(n+1)=2(a_n+n)$ ← ※$\{a_n+n\}$は公比2の等比数列

$a_n+n=(a_1+1)\cdot2^{n-1}=2^n$

よって $a_n=2^n-n$

(4) $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}=\frac{3}{a_n}+2$　※$x=3x+2$　$x=-1$

$\frac{1}{a_{n+1}}+1=3\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$ ← ※$\{\frac{1}{a_n}+1\}$は公比3の等比数列

$\frac{1}{a_n}+1=\left(\frac{1}{a_1}+1\right)\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$

よって $a_n=\frac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}$

exercise 【漸化式③】　2年　組　番 名前

【11】隣接3項間型①：$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$（重解をもたないタイプ）

→ ① $x^2+px+q=0$ の2つの解を α,β としたときに

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ ← $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ と変形して連立する

② $a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ とおいて，a_1,a_2 から A,B を求める

例）$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ → $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2,3$

①の解き方

与式を変形して

$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$ 〜①

$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$ 〜②

①より $a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$ 〜①'

②より $a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$ 〜②'

①'−②' より $a_n=3^{n-1}-2^{n-1}$

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ の一般項 a_n は
$x^2+px+q=0$ の2解を $\alpha,\beta\ (\alpha\neq\beta)$
とするときに $a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ と表せる

ということを用いて

②の解き方

$x^2-5x+6=0$ より $x=2,3$ だから

$a_n=A\cdot2^n+B\cdot3^n$ と表せる

そこで $a_1=2A+3B=0$

$a_2=4A+9B=1$

$\therefore A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{3}$

よって $a_n=-\frac{1}{2}\cdot2^n+\frac{1}{3}\cdot3^n$

$=-2^{n-1}+3^{n-1}$

【12】隣接3項間型②：$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$（重解をもつタイプ）

→ $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ 一本で解く

例）$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

与式を変形して　※ $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$x=2.$

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$

$\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=4-2=2$

公比2の等比数列なので

$a_{n+1}-2a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$

$\therefore a_{n+1}=2a_n+2^n$

$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$ ← ※等差数列型

$\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_1}{2^1}+(n-1)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n$

$\therefore a_n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot2^n=n\cdot2^{n-1}$

【13】分数型②：$a_{n+1}=\frac{ra_n+s}{pa_n+q}$ → うまく誘導にのるのがコツ

例）$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{a_n+2}{2a_n+1}$ に対して

(1) $b_n=\frac{a_n-1}{a_n+1}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

(1) $a_{n+1}-1=\frac{a_n+2}{2a_n+1}-1=\frac{-a_n+1}{2a_n+1}=\frac{-(a_n-1)}{2a_n+1}$

$a_{n+1}+1=\frac{a_n+2}{2a_n+1}+1=\frac{3a_n+3}{2a_n+1}=\frac{3(a_n-1)}{2a_n+1}$

$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}=\frac{-(a_n-1)}{3(a_n+1)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{a_n-1}{a_n+1}=-\frac{1}{3}b_n$

よって $\{b_n\}$ は等比数列である.

(2) $b_1=\frac{a_1-1}{a_1+1}=\frac{1}{3}$ なので $b_n=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$

$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ より $3^na_n-3^n=(-1)^{n-1}a_n+(-1)^{n-1}$

$\{3^n-(-1)^{n-1}\}a_n=3^n+(-1)^{n-1}$

$\therefore a_n=\frac{3^n+(-1)^{n-1}}{3^n-(-1)^{n-1}}$

●●○　練習問題　○●●

(1) $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$ ← $x^2-4x+3=0$，$(x-3)(x-1)=0$，$x=3,1.$

(2) $a_1=1$，$a_2=6$，$a_n+2a_{n-1}-3a_{n-2}=0\ (n\geqq3)$ をみたすとき

(i) a_n を a_{n-1} で表せ。$(n\geqq2)$ ← $x^2+2x-3=0$，$(x+3)(x-1)=0$，$x=-3,1$

(ii) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $a_1=4$，$a_{n+1}=\frac{4a_n-9}{a_n-2}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(i) すべての n に対して，$a_n\neq3$ を示せ。

(ii) $b_n=\frac{1}{a_n-3}$ とおくとき，$\{b_n\},\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，

$2a_n-S_n=3^n\ (n=1,2,3\cdots)$ となる関係がある。一般項を求めよ。

(1) 与式より $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$ 〜①

$a_{n+2}-3a_{n+1}=(a_{n+1}-3a_n)$ 〜②

①より $a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$ 〜①'

②より $a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)\cdot1^{n-1}=-1$ 〜②'

①'②'より $a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

(2)(i) 与式より $a_n+3a_{n-1}=a_{n-1}+3a_{n-2}$

$=a_{n-2}+3a_{n-3}=\cdots=a_2+3a_1=9$

よって $a_n+3a_{n-1}=9$ 〜① ← $x+3x=9$，$x=\frac{9}{4}$

(ii) ①より $a_n-\frac{9}{4}=-3\left(a_{n-1}-\frac{9}{4}\right)$

$\therefore a_n-\frac{9}{4}=\left(a_1-\frac{9}{4}\right)\cdot(-3)^{n-1}=-\frac{5\cdot(-3)^{n-1}}{4}$

よって $a_n=\frac{1}{4}(9-5\cdot(-3)^{n-1})$

(3)(i) ある $n+1$ に対して $a_{n+1}=3$ であったと仮定すると

$a_{n+1}=3=\frac{4a_n-9}{a_n-2}$ より $4a_n-9=3a_n-6$ $\therefore a_n=3$

となり $a_{n+1}=a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=3$ となるので $a_1=4$ に反する。よって $a_n\neq3$

(ii) $a_{n+1}-3=\frac{4a_n-9}{a_n-2}-3=\frac{a_n-3}{a_n-2}$

$\frac{1}{a_{n+1}-3}=\frac{a_n-2}{a_n-3}=\frac{1}{a_n-3}+1$ より $b_{n+1}=b_n+1$，$b_1=\frac{1}{a_1-3}=1$

よって $b_n=n$，$a_n-3=\frac{1}{n}$ より $a_n=\frac{1}{n}+3$

(4) $n\geqq2$ で $2(a_n-a_{n-1})-(S_n-S_{n-1})=3^n-3^{n-1}$

$\therefore 2a_n-2a_{n-1}-a_n=3^n-3^{n-1}$ 〜①

①より $a_n=2a_{n-1}+2\cdot3^{n-1}\ (n\geqq2)$ より $\frac{a_n}{3^n}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}+\frac{2}{3}$

$\frac{a_n}{3^n}-2=\frac{2}{3}\left(\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}-2\right)=\cdots=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{a_1}{3}-2\right)=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ← $2a_1-a_1=3^1$，$a_1=3$

$\therefore a_n=-3\cdot2^{n-1}+2\cdot3^n$

◆◆◇　演習問題　◇◆◆

1. 数列 $\{a_n\}$ が次の関係式をみたすとき，一般項 a_n を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+1$

(2) $a_0=1,\ a_n=\dfrac{a_{n-1}}{3+a_{n-1}}$

(3) $a_1=10,\ \sqrt[3]{\dfrac{a_{n+1}}{10}}=a_n$

(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+n-1$

(5) $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+(-2)^n$

(6) $x_1=1,\ x_2=5,\ x_{n+1}=5x_n-6x_{n-1}$

(7) $y_1=1,\ y_2=\dfrac{1}{5},\ y_ny_{n-1}=5y_{n+1}y_{n-1}-6y_{n+1}y_n$

(8) $a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=3n^2-4n$

$x=3x+1\quad x=-\frac{1}{2}$

(1) $a_{n+1}+\frac{1}{2}=3(a_n+\frac{1}{2})$

$a_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}\quad \boxed{a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)}$

(2) $\dfrac{3+a_{n-1}}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{a_n}\to\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{3}{a_{n-1}}+1,\quad \dfrac{1}{a_0}=1$

$\frac{1}{a_n}=b_n$ とおくと $b_n=3b_{n-1}+1\quad b_0=1$

(1)より $b_n=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)\quad \therefore \boxed{a_n=\dfrac{2}{3^{n+1}-1}}$　a_n は $n+1$ 項目

(3) $a_1>0$ より $a_n>0$

両辺の対数をとって（底は10）

$\frac{1}{3}(\log_{10}a_{n+1}-1)=\log a_n\to\log_{10}a_{n+1}=3\log_{10}a_n+1$

$\log_{10}a_n=c_n$ とおいて　$c_{n+1}=3c_n+1\quad c_1=\log_{10}10=1$

(1)より $c_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$

$\log_{10}a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)\quad \therefore \boxed{a_n=10^{\frac{1}{2}(3^n-1)}}$

(4) $a_{n+1}+\frac{n-1}{2}=3(a_n+\frac{n-1}{2})$　　$x=3x+n-1$　$x=-\frac{n-1}{2}$

$a_{n+1}+\frac{(n+1)-1}{2}=3(a_n+\frac{n-1}{2})+\frac{1}{2}$．$a_n+\frac{n-1}{2}=b_n$ とおくと $b_{n+1}=3b_n+\frac{1}{2}$

$b_{n+1}+\frac{1}{4}=3(b_n+\frac{1}{4})\quad b_1=a_1=1$．

$b_n=(b_1+\frac{1}{4})\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{4}$

$a_n=b_n-\frac{n-1}{2}=\frac{5}{4}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{4}(5\cdot 3^{n-1}-2n+1)}$

(5) $\dfrac{a_{n+1}}{(-2)^{n+1}}=-\dfrac{3}{2}\dfrac{a_n}{(-2)^n}-\dfrac{1}{2}\quad \dfrac{a_1}{(-2)^1}=-\dfrac{1}{2}$　　$x=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$　$2x=-3x-1$　$x=-\frac{1}{5}$

$\dfrac{a_{n+1}}{(-2)^{n+1}}+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{a_n}{(-2)^n}+\dfrac{1}{5}\right)$

$\dfrac{a_n}{(-2)^n}=\left(\dfrac{a_1}{(-2)^1}+\dfrac{1}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{3}{10}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-\dfrac{1}{5}$

$a_n=(-2)^n\left\{\left(-\dfrac{3}{10}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-\dfrac{1}{5}\right\}=(-2)^n\left\{\dfrac{3^n}{5\cdot(-2)^n}-\dfrac{1}{5}\right\}$

$=\boxed{\dfrac{3^n-(-2)^n}{5}}$

(6) 与式を変形して　　$x^2-5x+6=0$　$(x-2)(x-3)=0$　$x=2,3$

① $x_{n+2}-2x_{n+1}=3(x_{n+1}-2x_n)$，② $x_{n+2}-3x_{n+1}=2(x_{n+1}-3x_n)$

①より $x_{n+1}-2x_n=3^{n-1}(x_2-2x_1)=3^n\cdots$①′

②より $x_{n+1}-3x_n=2^{n-1}(x_2-3x_1)=2^n\cdots$②′

①′－②′より $\boxed{x_n=3^n-2^n}$

(7) $y_n\neq 0$ は自明だから．両辺を $y_{n+1}y_ny_{n-1}$ でわって

$\dfrac{1}{y_{n+1}}=\dfrac{5}{y_n}-\dfrac{6}{y_{n-1}}\quad \dfrac{1}{y_n}=z_n$ とおくと

$z_{n+1}-5z_n+6z_{n-1}=0$ となって．(6)より $z_n=3^n-2^n$

よって．$\boxed{y_n=\dfrac{1}{3^n-2^n}}$

(8) $n\geqq 2$ のとき

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2-4k)=1+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)-2n(n-1)$

$=\frac{1}{2}(2n^3-7n^2+5n+2)$

これは $a_1=1$ をみたす

$\therefore a_n=\frac{1}{2}(2n^3-7n^2+5n+2)\quad(n=1,2,3\cdots)$

2. 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}}+\dfrac{2}{n+1}=1\ (n=2,3,4\cdots)$ をみたすとき，

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ を求めよ。　　　（東京学芸大学）

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1-\dfrac{2}{n+1}=\dfrac{n-1}{n+1}$

$\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_4}{a_3}\cdots\cdots\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{3}{5}\cdots\cdots\dfrac{n-3}{n-1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-1}{n+1}$ より $\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{2}{n(n+1)}$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$S_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=\boxed{1-\dfrac{1}{n+1}}$

3. $a_1=1,\ b_1=3,\ a_{n+1}=3a_n+b_n,\ b_{n+1}=2a_n+4b_n$ で定められる $\{a_n\},\{b_n\}$ がある。

(1) $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ をみたす α,β の組を2組求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ の一般項を求めよ。　　　（三重大学）

(1) $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=(3a_n+b_n)+\alpha(2a_n+4b_n)$

$=(3+2\alpha)a_n+(1+4\alpha)b_n$

$=\beta a_n+\alpha\beta b_n$　より $\begin{cases}3+2\alpha=\beta\\1+4\alpha=\alpha\beta\end{cases}$　$\boxed{(\alpha,\beta)=(1,5),(-\frac{1}{2},2)}$

(2) $a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$ より

$a_n+b_n=5(a_{n-1}+b_{n-1})=\cdots=5^{n-1}(a_1+b_1)=4\cdot 5^{n-1}\cdots$①

$a_{n+1}-\frac{1}{2}b_{n+1}=2(a_n-\frac{1}{2}b_n)$ より

$a_n-\frac{1}{2}b_n=2(a_{n-1}-\frac{1}{2}b_{n-1})=\cdots=2^{n-1}(a_1-\frac{1}{2}b_1)=-\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\cdots$②

①，②より $\boxed{\begin{array}{l}a_n=\frac{1}{3}(4\cdot 5^{n-1}-2^{n-1})\\ b_n=\frac{1}{3}(8\cdot 5^{n-1}+2^{n-1})\end{array}}$

4. p を0でない実数とする。数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ を次のように定義する。

$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n+p^{-1}\ (n=1,2,\cdots)$

(1) $|p|=1$ のとき，a_n を求めよ。

(2) $|p|\neq 1$ のとき，a_n を求めよ。　　　（北海道大学・改）

(1)・$p=1$ のとき　$a_{n+1}=a_n+1\quad a_n=1+n-1=\boxed{n}$

・$p=-1$ 〃　$a_{n+1}=-a_n+(-1)^n$

$\dfrac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}}=\dfrac{a_n}{(-1)^n}-1\quad\dfrac{a_n}{(-1)^n}=-1-(n-1)=-n\quad\therefore\boxed{a_n=-n(-1)^n}$

(2) $a_{n+1}=pa_n+(p^{-1})^n\to\dfrac{a_{n+1}}{(p^{-1})^{n+1}}=\dfrac{pa_n}{(p^{-1})(p^{-1})^n}+\dfrac{1}{(p^{-1})}\to\dfrac{a_{n+1}}{(p^{-1})^{n+1}}=p^2\dfrac{a_n}{(p^{-1})^n}+p$

$\dfrac{a_n}{(p^{-1})^n}=b_n$ とおく　$b_{n+1}=p^2b_n+p\quad b_1=\dfrac{a_1}{(p^{-1})}=p$

$b_{n+1}-\dfrac{p}{1-p^2}=p^2\left(b_n-\dfrac{p}{1-p^2}\right)\quad b_n-\dfrac{p}{1-p^2}=p^{2(n-1)}\left(p-\dfrac{p}{1-p^2}\right)=p^{2n-1}\left(1-\dfrac{1}{1-p^2}\right)$

$b_n=p^{2n-1}\left(1-\dfrac{1}{1-p^2}\right)+\dfrac{1}{1-p^2}=\dfrac{a_n}{(p^{-1})^n}=p^n\cdot a_n$

$a_n=p^{n-1}\left(1-\dfrac{1}{1-p^2}\right)+\dfrac{p^{1-n}}{1-p^2}=p^{n-1}\cdot\dfrac{-p^2}{1-p^2}+\dfrac{p^{1-n}}{1-p^2}=\dfrac{-p^{n+1}+p^{1-n}}{1-p^2}$

$=\boxed{\dfrac{p^{1+n}-p^{1-n}}{p^2-1}}$