exercise 【漸化式①】　　　　　年　　組　　番 名前

■■□　数列の帰納的定義　□■■

（1）初項　（2）前の項から，その次に続く項を定める規則

の２つを与えて数列を定めること。

（2）の規則を式で示したものを**漸化式**という。

【1】等差数列型：$a_{n+1}=a_n+d$ → $a_{n+1}-a_n=d$ より公差 d の等差数列

例）$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n-3$

【2】等比数列型：$a_{n+1}=ra_n$ → $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ より公比 r の等比数列

例）$a_1=-3$，$5a_{n+1}=2a_n$

【3】変比数列型：$a_{n+1}=f(n)a_n$ → $n=1, 2, 3, \cdots$ を代入して辺々かける

例）$a_1=7$，$(n+2)a_{n+1}=na_n$

【4】階差数列型：$a_{n+1}=a_n+f(n)$ → $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$　$(n\geqq 2)$ と $n=1$ の確認

例）$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+n$

例）$a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=2^n$

【5】隣接２項間型①：$a_{n+1}=pa_n+q$ → 特性方程式 $x=px+q$ を解いて等比数列を作る

例）$a_1=3$，$a_{n+1}=4a_n+3$

【6】指数型：$a_{n+1}=a_n{}^k$ → 両辺の対数をとって隣接２項間型①に

例）$a_1=10$，$a_{n+1}=10a_n{}^3$

exercise 【漸化式②】　　　　　　　　年　　組　　番 名前

【7】隣接２項間型②：$a_{n+1} = pa_n + q^n$ → 両辺を q^{n+1} でわって $\dfrac{a_n}{q_n} = b_n$ とおいて隣接２項間型①に

例） $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

【8】隣接２項間型③：$a_{n+1} = pa_n + qn + r$ →①階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ を
②$\{a_n + \alpha n + \beta\}$ の等比数列へ

例） $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n - 3n$

①の解き方

②の解き方

【9】分数型①：$a_{n+1} = \dfrac{ra_n}{pa_n + q}$ → 両辺の逆数をとって $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおく

例） $a_1 = \dfrac{1}{4},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n + 5}$

【10】S_n を含む漸化式型：→ $a_n = 1, a_n = S_n - S_{n+1}\ (n \geqq 2)$ の利用

例） $a_1 = 1,\ a_{n+1} = S_n + (n+1)$　ただし $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

exercise 【漸化式③】　　年　組　番 名前

【11】隣接３項間型①：$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$（重解をもたないタイプ）

→ ①　$x^2+px+q=0$ の２つの解を α,β としたときに

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta\left(a_{n+1}-\alpha a_n\right)$$
$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha\left(a_{n+1}-\beta a_n\right)$$

と変形して連立する

②　$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ とおいて，a_1,a_2 から A,B を求める

例）$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

①の解き方

②の解き方

【12】隣接３項間型②：$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$（重解をもつタイプ）

→ $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha\left(a_{n+1}-\alpha a_n\right)$ 一本で解く

例）$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

【13】分数型②：$a_{n+1}=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$ → うまく誘導にのるのがコツ

例）$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{2a_n+1}$ に対して

(1)　$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$ とおくと，数列 $\left\{b_n\right\}$ は等比数列であることを示せ。

(2)　数列 $\left\{a_n\right\}$ の一般項を求めよ