exercise 【漸化式①】　　　　年　　組　　番 名前

■■□　数列の帰納的定義　□■■
（1）初項　（2）前の項から，その次に続く項を定める規則
の2つを与えて数列を定めること。
（2）の規則を式で示したものを漸化式という。

【1】等差数列型：$a_{n+1}=a_n+d$ → $a_{n+1}-a_n=d$ より公差 d の等差数列

例）$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n-3$

$a_{n+1}-a_n=-3$ より　公差 -3

よって数列 $\{a_n\}$ は　初項 2　公差 -3　の等差数列なので

$$a_n=2+(n-1)\times(-3)$$
$$=-3n+5$$

【2】等比数列型：$a_{n+1}=ra_n$ → $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ より公比 r の等比数列

例）$a_1=-3$，$5a_{n+1}=2a_n$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2}{5}$ より　公比 $\dfrac{2}{5}$　　※ $a_{n+1}=\dfrac{2}{5}a_n$ で判断することが多い

よって数列 $\{a_n\}$ は　初項 -3　公差 $\dfrac{2}{5}$　の等差数列なので

$$a_n=-3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

【3】変比数列型：$a_{n+1}=f(n)a_n$ → $n=1, 2, 3, \cdots$ を代入して辺々かける

例）$a_1=7$，$(n+2)a_{n+1}=na_n$

$n=1$　のとき　$3\cdot a_2=1\cdot a_1$
$n=2$　のとき　$4\cdot a_3=2\cdot a_2$
$n=3$　のとき　$5\cdot a_4=3\cdot a_3$
$\cdots$　　$\cdots$
$n=n-2$ のとき　$n\cdot a_{n-1}=(n-2)\cdot a_{n-2}$
$n=n-1$ のとき　$(n+1)\cdot a_n=(n-1)\cdot a_{n-1}$
両辺掛け算すると
$$3\cdot4\cdot5\cdot\cdots\cdot n\cdot(n+1)\cdot a_n=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot a_1$$
$$n(n+1)a_n=1\cdot2\cdot a_1$$
$$n(n+1)a_n=1\cdot2\cdot7$$
よって
$$a_n=\frac{14}{n(n+1)}$$

【4】階差数列型：$a_{n+1}=a_n+f(n)$ → $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$　$(n\geqq2)$ と $n=1$ の確認

例）$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+n$

$a_{n+1}-a_n=n$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=3+\dfrac{1}{2}(n-1)n=\dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n+3$

これは　$a_1=3$　を満たす

よって　$a_n=\dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n+3$

例）$a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=2^n$

$a_{n+1}-a_n=2^n$
$n\geqq2$ のとき
$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=3+2^n-2=2^n+1$$
これは　$a_1=3$　を満たす
よって　$a_n=2^n+1$

【5】隣接2項間型①：$a_{n+1}=pa_n+q$ → 特性方程式 $x=px+q$ を解いて等比数列を作る

例）$a_1=3$，$a_{n+1}=4a_n+3$

※　特性方程式を立てて
$x=4x+3$　　$\therefore x=-1$

$a_{n+1}=\bigcirc\,a_n+q$
特性方程式の解 $x=\square$
$\Rightarrow a_{n+1}-\square=\bigcirc(a_n-\square)$

$$a_{n+1}-(-1)=4\{a_n-(-1)\}$$
$$a_{n+1}+1=4(a_n+1)$$

ここで　$b_n=a_n+1$ とすると

※煩雑になるので置き換えなくても良い。

$b_1=a_1+1=3+1=4$

$b_{n+1}=4b_n$

であるから，数列 $\{b_n\}$ は初項 4 公比 4 の等比数列である

$b_n=4\cdot4^{n-1}=4^n$

$a_n+1=4^n$

$\therefore a_n=4^n-1$

【6】指数型：$a_{n+1}=a_n{}^k$ → 両辺の対数をとって隣接2項間型①に

例）$a_1=10$，$a_{n+1}=10a_n{}^3$

両辺の対数をとると

$\log_{10}a_{n+1}=\log_{10}10a_n{}^3$

$\log_{10}a_{n+1}=\log_{10}10+\log_{10}a_n{}^3$

$\log_{10}a_{n+1}=1+3\log_{10}a_n$

ここで　$b_n=\log_{10}a_n$ とすると

$b_1=\log_{10}a_1=\log_{10}10=1$

$b_{n+1}=3b_n+1$

$x=3x+1$
$\therefore x=-\dfrac{1}{2}$

$b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(b_n+\dfrac{1}{2}\right)$

$b_1+\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$　であるから，数列 $\left\{b_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $\dfrac{3}{2}$ 公比 3 の等比数列である

$b_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\cdot3^{n-1}=\dfrac{3^n}{2}$

$b_n=\dfrac{3^n}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$

$\log_{10}a_n=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$

$\therefore a_n=10^{\frac{1}{2}(3^n-1)}$

exercise 【漸化式②】　　　　年　　組　　番 名前

【7】隣接２項間型②：$a_{n+1}=pa_n+q^n$ → 両辺を q^{n+1} でわって $\dfrac{a_n}{q_n}=b_n$ と
おいて隣接２項間型①に

例）$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2a_n}{3^{n+1}}+\dfrac{3^n}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{1}{3}$

ここで　$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とすると　$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{1}{3}$　　$b_1=\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{1}{3}$

$b_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}(b_n-1)$

$x=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$
$\therefore x=1$

$b_1-1=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$　であるから，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $-\dfrac{2}{3}$ 公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるので　$b_n-1=-\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$\dfrac{a_n}{3^n}=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1$

$\therefore a_n=-2^n+3^n$

【8】隣接２項間型③：$a_{n+1}=pa_n+qn+r$ →①階差数列 $b_n=a_{n+1}-a_n$ を
②$\{a_n+\alpha n+\beta\}$ の等比数列へ

例）$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n-3n$

$n\geqq 2$ とすると

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=2a_n-3n \\ -) & a_n=2a_{n-1}-3(n-1) \\ \hline & a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})-3 \end{array}$$

ここで　$b_n=a_{n+1}-a_n$ とすると

$b_{n+1}=2b_n-3$　　$b_1=a_2-a_1=2a_1-3-a_1=-2$

$x=2x-3$
$\therefore x=3$

$b_{n+1}-3=2(b_n-3)$　　$b_1-3=-2-3=-5$　であるから，

数列 $\{b_n-3\}$ は初項 -5 公比 2 の等比数列であるので

$b_n-3=-5\cdot 2^{n-1}$　$\therefore b_n=a_{n+1}-a_n=-5\cdot 2^{n-1}+3$

$n\geqq 2$ なので　$a_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(-5\cdot 2^{k-1}+3\right)$

$=1-5\cdot\dfrac{1\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}+3(n-1)$

$=3n-5\cdot 2^{n-1}+3$

これは $a_1=1$ を満たすので

$a_n=3n-5\cdot 2^{n-1}+3$

②の解き方

$a_{n+1}-\{p(n+1)+q\}=2\{a_n-(pn+q)\}$ を満たす p,q は展開して整理すると　$a_{n+1}=2a_n-pn+p-q$　となることから $p=3,q=3$

よって与式を変形して

$a_{n+1}-\{3(n+1)+3\}=2\{a_n-(3n+3)\}$　とできる

ここで数列 $\{a_n-(3n+3)\}$ は $a_1-(3+3)=1-6=-5$ より

初項 -5　公比 2 の等比数列であるので

$a_n-(3n+3)=-5\cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ a_n=-5\cdot 2^{n-1}+3n+3$

【9】分数型①：$a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$ → 両辺の逆数をとって $\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおく

例）$a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+5}$

両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{4a_n+5}{a_n}=4+\dfrac{5}{a_n}$

ここで　$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とすると　$b_{n+1}=5b_n+4$　　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=4$

$b_{n+1}+1=5(b_n+1)$

$x=5x+4$
$\therefore x=-1$

$b_1+1=4+1=5$　であるから，

数列 $\{b_n+1\}$ は初項 5 公比 5 の等比数列であるので

$b_n+1=5\cdot 5^{n-1}=5^n$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}=5^n-1\left(=\dfrac{5^n-1}{1}\right)$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{5^n-1}$

【10】S_n を含む漸化式型：→　$a_n=1,a_n=S_n-S_{n+1}\ (n\geqq 2)$ の利用

例）$a_1=1$，$a_{n+1}=S_n+(n+1)$　ただし $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$$\begin{array}{rl} & a_{n+2}=S_{n+1}+(n+2) \\ -) & a_{n+1}=S_n\ +(n+1) \\ \hline & a_{n+2}-a_{n+1}=(S_{n+1}-S_n)+1 \end{array}$$

$S_n-S_{n-1}=a_n$ より
$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$

$a_{n+2}-a_{n+1}=(S_{n+1}-S_n)+1=a_{n+1}+1$

$x=2x+1$
$\therefore x=-1$

$a_{n+2}=2a_{n+1}+1$

$a_{n+2}+1=2(a_{n+1}+1)$　であるから，

数列 $\{a_n+1\}$ は初項　2　公比 2 の等比数列であるので

$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

$a_n=2^n-1$

exercise 【漸化式③】　　　　　　年　　組　　番 名前

【11】隣接３項間型①：$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$（重解をもたないタイプ）

→ ① $x^2+px+q=0$ の２つの解を α,β としたときに

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta\left(a_{n+1}-\alpha a_n\right)$

$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha\left(a_{n+1}-\beta a_n\right)$　　と変形して連立する

② $a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ とおいて，a_1,a_2 から A,B を求める

例）$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

①の解き方

※　特性方程式を立てて

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$　　　$\therefore x=2\,,3$

与式を変形して

$a_{n+2}-2a_{n+1}=3\left(a_{n+1}-2a_n\right)$　…①

$a_{n+2}-3a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-3a_n\right)$　…②

①について　$a_2-2a_1=1$ なので

$a_{n+1}-2a_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$　…③

②について　$a_2-3a_1=1$ なので

$a_{n+1}-3a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$　…④

③－④より

$a_n=3^{n-1}-2^{n-1}$

②の解き方

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ の一般項 a_n は

$x^2+px+q=0$ の２解を $\alpha,\beta\ (\alpha\neq\beta)$ とするときに

$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ と表せる。

ということを用いて

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$　　　$\therefore x=2\,,3$　だから

$a_n=A\cdot 2^n+B\cdot 3^n$　と表せる

そこで　$a_1=2A+3B=0$

$a_2=4A+9B=1$

$\therefore A=-\dfrac{1}{2}\,,B=\dfrac{1}{3}$

よって

$a_n=-\dfrac{1}{2}\cdot 2^n+\dfrac{1}{3}\cdot 3^n$

$a_n=3^{n-1}-2^{n-1}$

【12】隣接３項間型②：$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$（重解をもつタイプ）

→ $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha\left(a_{n+1}-\alpha a_n\right)$ 一本で解く

例）$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

※　特性方程式を立てて

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$　　　$\therefore x=2$

与式を変形して

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-2a_n\right)$

数列 $\left\{a_{n+1}-2a_n\right\}$ は初項　$a_2-2a_1=4-2=2$　公比 2 の等比数列であるので

$a_{n+1}-2a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$　　∴　$a_{n+1}=2a_n+2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{2a_n}{2^{n+1}}+\dfrac{2^n}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{1}{2}$

ここで　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{1}{2}$　であるから，

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるので

$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}+(n-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}n$

$\therefore a_n=\dfrac{2^n}{2}n=n\cdot 2^{n-1}$

【13】分数型②：$a_{n+1}=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$ → うまく誘導にのるのがコツ

例）$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{2a_n+1}$ に対して

(1) $b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$ とおくと，数列 $\left\{b_n\right\}$ は等比数列であることを示せ。

(2) 数列 $\left\{a_n\right\}$ の一般項を求めよ

(1)

※　b_n の分子が a_n-1，分母が a_n+1 なのを手がかりに進めていく

$a_{n+1}-1=\dfrac{a_n+2}{2a_n+1}-1=\dfrac{-a_n+1}{2a_n+1}=\dfrac{-\left(a_n-1\right)}{2a_n+1}$

$a_{n+1}+1=\dfrac{a_n+2}{2a_n+1}+1=\dfrac{3a_n+3}{2a_n+1}=\dfrac{3\left(a_n+1\right)}{2a_n+1}$

なので

$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{-\left(a_n-1\right)}{2a_n+1}\cdot\dfrac{2a_n+1}{3\left(a_n+1\right)}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n+1}=-\dfrac{1}{3}b_n$

$\therefore b_{n+1}=-\dfrac{1}{3}b_n$　より　$\left\{b_n\right\}$ は等比数列である

(2)

$b_1=\dfrac{a_1-1}{a_1+1}=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$　なので　$b_n=\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=-\dfrac{(-1)^n}{3^n}$

$\dfrac{a_n-1}{a_n+1}=\dfrac{-(-1)^n}{3^n}$　より　$3^n a_n-3^n=-(-1)^n a_n-(-1)^n$

$\left\{3^n+(-1)^n\right\}a_n=3^n-(-1)^n$

$a_n=\dfrac{3^n-(-1)^n}{3^n+(-1)^n}$