

■ ■ □ 数列の帰納的定義 □ ■ ■

- (1) 初項 (2) 前の項から、その次に続く項を定める規則の2つを与えて数列を定めること。
 (2) の規則を式で示したものを漸化式という。

【1】等差数列型: $a_{n+1} = a_n + d \rightarrow a_{n+1} - a_n = d$ より公差 d の等差数列

例) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n - 3$

$a_{n+1} - a_n = -3$ より 公差 -3

よって数列 $\{a_n\}$ は 初項 2 公差 -3 の等差数列なので

$$a_n = 2 + (n-1) \times (-3) = -3n + 5$$

【2】等比数列型: $a_{n+1} = ra_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ より公比 r の等比数列

例) $a_1 = -3, 5a_{n+1} = 2a_n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{5}$ より 公比 $\frac{2}{5}$ ※ $a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n$ で判断することが多い

よって数列 $\{a_n\}$ は 初項 -3 公比 $\frac{2}{5}$ の等比数列なので

$$a_n = -3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

【3】変比数列型: $a_{n+1} = f(n)a_n \rightarrow n=1, 2, 3, \dots$ を代入して辺々かける

例) $a_1 = 7, (n+2)a_{n+1} = na_n$

$n=1$ のとき	$3 \cdot a_2 = 1 \cdot a_1$
$n=2$ のとき	$4 \cdot a_3 = 2 \cdot a_2$
$n=3$ のとき	$5 \cdot a_4 = 3 \cdot a_3$
...	...
$n=n-2$ のとき	$n \cdot a_{n-1} = (n-2) \cdot a_{n-2}$
$n=n-1$ のとき	$(n+1) \cdot a_n = (n-1) \cdot a_{n-1}$

両辺掛け算すると

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n \cdot (n+1) \cdot a_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \cdot a_1$$

$$n(n+1)a_n = 1 \cdot 2 \cdot a_1$$

$$n(n+1)a_n = 1 \cdot 2 \cdot 7$$

よって

$$a_n = \frac{14}{n(n+1)}$$

【4】階差数列型: $a_{n+1} = a_n + f(n) \rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ ($n \geq 2$) と $n=1$ の確認

例) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + n$

$a_{n+1} - a_n = n$

$n \geq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 3 + \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 3$

これは $a_1 = 3$ を満たす

よって $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 3$

例) $a_1 = 3, a_{n+1} - a_n = 2^n$

$a_{n+1} - a_n = 2^n$
 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 3 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2-1} = 3 + 2^n - 2 = 2^n + 1$$

これは $a_1 = 3$ を満たす

よって $a_n = 2^n + 1$

【5】隣接2項間型①: $a_{n+1} = pa_n + q \rightarrow$ 特性方程式 $x = px + q$ を解いて等比数列を作る

例) $a_1 = 3, a_{n+1} = 4a_n + 3$

※ 特性方程式を立てて

$x = 4x + 3 \quad \therefore x = -1$

$a_{n+1} - (-1) = 4\{a_n - (-1)\}$
 $a_{n+1} + 1 = 4(a_n + 1)$

$a_{n+1} = \square a_n + q$
 特性方程式の解 $x = \square$
 $\Rightarrow a_{n+1} - \square = \square(a_n - \square)$

ここで $b_n = a_n + 1$ とすると

$b_1 = a_1 + 1 = 3 + 1 = 4$

$b_{n+1} = 4b_n$

※煩雑になるので置き換えなくても良い。

であるから、数列 $\{b_n\}$ は初項 4 公比 4 の等比数列である

$b_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$

$a_n + 1 = 4^n$

$\therefore a_n = 4^n - 1$

【6】指数型: $a_{n+1} = a_n^k \rightarrow$ 両辺の対数をとって隣接2項間型①に

例) $a_1 = 10, a_{n+1} = 10a_n^3$

両辺の対数をとると

$\log_{10} a_{n+1} = \log_{10} 10a_n^3$

$\log_{10} a_{n+1} = \log_{10} 10 + \log_{10} a_n^3$

$\log_{10} a_{n+1} = 1 + 3\log_{10} a_n$

ここで $b_n = \log_{10} a_n$ とすると

$b_1 = \log_{10} a_1 = \log_{10} 10 = 1$

$b_{n+1} = 3b_n + 1$

$b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(b_n + \frac{1}{2}\right)$

$x = 3x + 1$
 $\therefore x = -\frac{1}{2}$

$b_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ であるから、数列 $\left\{b_n + \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $\frac{3}{2}$ 公比 3

の等比数列である

$b_n + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} = \frac{3^n}{2}$

$b_n = \frac{3^n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

$\log_{10} a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

$\therefore a_n = 10^{\frac{1}{2}(3^n - 1)}$

【7】隣接2項間型②: $a_{n+1} = pa_n + q^n \rightarrow$ 両辺を q^{n+1} でわって $\frac{a_n}{q_n} = b_n$ と
 おいて隣接2項間型①に

例) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2a_n}{3^{n+1}} + \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$

ここで $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とすると $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}$ $b_1 = \frac{a_1}{3^1} = \frac{1}{3}$

$b_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(b_n - 1)$ $x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
 $\therefore x = 1$

$b_1 - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$ であるから、数列 $\{b_n - 1\}$ は初項 $-\frac{2}{3}$ 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるので $b_n - 1 = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\frac{a_n}{3^n} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$

$\therefore a_n = -2^n + 3^n$

【8】隣接2項間型③: $a_{n+1} = pa_n + qn + r \rightarrow$ ①階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ を
 ② $\{a_n + \alpha n + \beta\}$ の等比数列へ

例) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 3n$

$a_{n+1} = 2a_n - 3n$
 $n \geq 2$ とすると $\begin{array}{r} a_{n+1} = 2a_n - 3n \\ -) a_n = 2a_{n-1} - 3(n-1) \\ \hline a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) - 3 \end{array}$

ここで $b_n = a_{n+1} - a_n$ とすると $b_{n+1} = 2b_n - 3$ $b_1 = a_2 - a_1 = 2a_1 - 3 - a_1 = -2$ $x = 2x - 3$
 $\therefore x = 3$

$b_{n+1} - 3 = 2(b_n - 3)$ $b_1 - 3 = -2 - 3 = -5$ であるから、
 数列 $\{b_n - 3\}$ は初項 -5 公比 2 の等比数列であるので
 $b_n - 3 = -5 \cdot 2^{n-1} \therefore b_n = a_{n+1} - a_n = -5 \cdot 2^{n-1} + 3$

$n \geq 2$ なので $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-5 \cdot 2^{k-1} + 3)$

$= 1 - 5 \cdot \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} + 3(n-1)$
 $= 3n - 5 \cdot 2^{n-1} + 3$

これは $a_1 = 1$ を満たすので
 $a_n = 3n - 5 \cdot 2^{n-1} + 3$

②の解き方

$a_{n+1} - \{p(n+1) + q\} = 2\{a_n - (pn + q)\}$ を満たす p, q は展開して整理すると $a_{n+1} = 2a_n - pn + p - q$ となることから $p = 3, q = 3$

よって与式を変形して $a_{n+1} - \{3(n+1) + 3\} = 2\{a_n - (3n + 3)\}$ とできる

ここで数列 $\{a_n - (3n + 3)\}$ は $a_1 - (3 + 3) = 1 - 6 = -5$ より
 初項 -5 公比 2 の等比数列であるので
 $a_n - (3n + 3) = -5 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore a_n = -5 \cdot 2^{n-1} + 3n + 3$

【9】分数型①: $a_{n+1} = \frac{ra_n}{pa_n + q} \rightarrow$ 両辺の逆数をとって $\frac{1}{a_n} = b_n$ とおく

例) $a_1 = \frac{1}{4}, a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n + 5}$

両辺の逆数をとると $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4a_n + 5}{a_n} = 4 + \frac{5}{a_n}$

ここで $b_n = \frac{1}{a_n}$ とすると $b_{n+1} = 5b_n + 4$ $b_1 = \frac{1}{a_1} = 4$

$b_{n+1} + 1 = 5(b_n + 1)$ $x = 5x + 4$
 $\therefore x = -1$

$b_1 + 1 = 4 + 1 = 5$ であるから、
 数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 5 公比 5 の等比数列であるので
 $b_n + 1 = 5 \cdot 5^{n-1} = 5^n$

$b_n = \frac{1}{a_n} = 5^n - 1 \left(= \frac{5^n - 1}{1} \right)$

$\therefore a_n = \frac{1}{5^n - 1}$

【10】 S_n を含む漸化式型: $\rightarrow a_n = S_1, a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ の利用

例) $a_1 = 1, a_{n+1} = S_n + (n+1)$ ただし $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$a_{n+2} = S_{n+1} + (n+2)$
 $\begin{array}{r} a_{n+2} = S_{n+1} + (n+2) \\ -) a_{n+1} = S_n + (n+1) \\ \hline a_{n+2} - a_{n+1} = (S_{n+1} - S_n) + 1 \end{array}$ $S_n - S_{n-1} = a_n$ より
 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$

$a_{n+2} - a_{n+1} = (S_{n+1} - S_n) + 1 = a_{n+1} + 1$ $x = 2x + 1$
 $\therefore x = -1$

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 1$

$a_{n+2} + 1 = 2(a_{n+1} + 1)$ であるから、
 数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 2 公比 2 の等比数列であるので

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$
 $a_n = 2^n - 1$

【11】隣接3項間型①: $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ (重解をもたないタイプ)

→ ① $x^2 + px + q = 0$ の2つの解を α, β としたときに

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \quad \text{と変形して連立する}$$

② $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ とおいて, a_1, a_2 から A, B を求める

例) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

①の解き方

※ 特性方程式を立てて

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 2, 3$$

与式を変形して

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n) \quad \dots \textcircled{2}$$

①について $a_2 - 2a_1 = 1$ なので

$$a_{n+1} - 2a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} \quad \dots \textcircled{3}$$

②について $a_2 - 3a_1 = 1$ なので

$$a_{n+1} - 3a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \quad \dots \textcircled{4}$$

③-④より

$$a_n = 3^{n-1} - 2^{n-1}$$

②の解き方

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ の一般項 a_n は

$x^2 + px + q = 0$ の2解を α, β ($\alpha \neq \beta$) とするときに

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n \quad \text{と表せる。}$$

ということを用いて

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 2, 3 \quad \text{だから}$$

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n \quad \text{と表せる}$$

$$\text{そこで } a_1 = 2A + 3B = 0$$

$$a_2 = 4A + 9B = 1$$

$$\therefore A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{3}$$

よって

$$a_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot 3^n$$

$$a_n = 3^{n-1} - 2^{n-1}$$

【12】隣接3項間型②: $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ (重解をもつタイプ)

→ $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \alpha a_n)$ 一本で解く

例) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

※ 特性方程式を立てて

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0 \quad \therefore x = 2$$

与式を変形して

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = 4 - 2 = 2$ 公比2の等比数列であるので

$$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \therefore a_{n+1} = 2a_n + 2^n$$

$$\text{両辺を } 2^{n+1} \text{ で割ると } \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$$

ここで $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}, \frac{a_1}{2^1} = \frac{1}{2}$ であるから,

数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ は初項 $\frac{1}{2}$, 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であるので

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$$

$$\therefore a_n = \frac{2^n}{2}n = n \cdot 2^{n-1}$$

【13】分数型②: $a_{n+1} = \frac{ra_n + s}{pa_n + q}$ → うまく誘導にのるのがコツ

例) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{2a_n + 1}$ に対して

(1) $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ とおくと, 数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

(1)

$$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n + 2}{2a_n + 1} - 1 = \frac{-a_n + 1}{2a_n + 1} = \frac{-(a_n - 1)}{2a_n + 1}$$

$$a_{n+1} + 1 = \frac{a_n + 2}{2a_n + 1} + 1 = \frac{3a_n + 3}{2a_n + 1} = \frac{3(a_n + 1)}{2a_n + 1}$$

なので

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 1} = \frac{-(a_n - 1)}{2a_n + 1} \cdot \frac{2a_n + 1}{3(a_n + 1)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 1} = -\frac{1}{3}b_n$$

$$\therefore b_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n \quad \text{より } \{b_n\} \text{ は等比数列である}$$

(2)

$$b_1 = \frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3} \quad \text{なので } b_n = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{(-1)^n}{3^n}$$

$$\frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \frac{-(-1)^n}{3^n} \quad \text{より } 3^n a_n - 3^n = -(-1)^n a_n - (-1)^n$$

$$\{3^n + (-1)^n\} a_n = 3^n - (-1)^n$$

$$a_n = \frac{3^n - (-1)^n}{3^n + (-1)^n}$$

※ b_n の分子が $a_n - 1$, 分母が $a_n + 1$ なのを手がかりに進めていく