exercise 【漸化式①】

年　組　番 名前

■■□　数列の帰納的定義　□■■

（1）初項　（2）前の項から，その次に続く項を定める規則

の２つを与えて数列を定めること。

（2）の規則を式で示したものを**漸化式**という。

【1】等差数列型：$a_{n+1}=a_n+d$ → $a_{n+1}-a_n=d$ より公差 d の等差数列

例）$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n-3$

例）$a_1=2$，$a_2=3$，$a_{n+2}-a_n=4$ のとき，$a_{40}=\boxed{}$

【2】等比数列型：$a_{n+1}=ra_n$ → $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ より公比 r の等比数列

例）$a_1=-3$，$5a_{n+1}=2a_n$

【3】変比数列型：$a_{n+1}=f(n)a_n$ → $n=1,2,3,\cdots$ を代入して辺々かける

例）$a_1=7$，$(n+2)a_{n+1}=na_n$

【4】階差数列型：$a_{n+1}=a_n+f(n)$ → $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$ $(n\geqq2)$ と $n=1$ の確認

例）$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+n$

例）$a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=2^n$

【5】隣接２項間型①：$a_{n+1}=pa_n+q$ → 特性方程式 $x=px+q$ を解いて等比数列を作る

例）$a_1=3$，$a_{n+1}=4a_n+3$

【6】指数型：$a_{n+1}={a_n}^k$ → 両辺の対数をとって隣接２項間型①に

例）$a_1=10$，$a_{n+1}=10{a_n}^3$

●●○　練習問題　○●●

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2$

(2) $a_1=-2,\ a_{n+1}=2a_n$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=na_n$

(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n^2$

(5) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2n+1$

(6) $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n-1$

(7) $a_1=2,\ 3a_{n+1}=2a_n+1$

exercise 【漸化式②】　　年　組　番 名前

【7】隣接２項間型②：$a_{n+1}=pa_n+q^n$ → 両辺を q^{n+1} でわって $\dfrac{a_n}{q_n}=b_n$ とおいて隣接２項間型①に

例）$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3^n$

【8】隣接２項間型③：$a_{n+1}=pa_n+qn+r$ →①階差数列 $b_n=a_{n+1}-a_n$ を
②$\left\{a_n+\alpha n+\beta\right\}$ の等比数列へ

例）$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n-3n$

①の解き方

②の解き方

【9】分数型①：$a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$ → 両辺の逆数をとって $\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおく

例）$a_1=\dfrac{1}{4},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+5}$

【10】S_n を含む漸化式型：→ $a_n=S_1, a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geqq 2)$ の利用

例）$a_1=1,\ a_{n+1}=S_n+(n+1)$　ただし $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

●●○　練習問題　○●●

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$　　(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n+(-2)^n$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+n-1$　　(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$

exercise 【漸化式③】　　年　組　番 名前

【11】隣接３項間型①：$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$（重解をもたないタイプ）
→ ①　$x^2+px+q=0$ の２つの解を α,β としたときに
$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta\left(a_{n+1}-\alpha a_n\right)$
$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha\left(a_{n+1}-\beta a_n\right)$　　と変形して連立する
②　$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ とおいて，a_1,a_2 から A,B を求める

例）$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

①の解き方

②の解き方

【12】隣接３項間型②：$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$（重解をもつタイプ）
→　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha\left(a_{n+1}-\alpha a_n\right)$ 一本で解く

例）$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

【13】分数型②：$a_{n+1}=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$ → うまく誘導にのるのがコツ

例）$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{2a_n+1}$ に対して

（1）$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$ とおくと，数列 $\left\{b_n\right\}$ は等比数列であることを示せ。

（2）数列 $\left\{a_n\right\}$ の一般項を求めよ

●●○　練習問題　○●●

(1) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$

(2) $a_1=1$, $a_2=6$, $a_n+2a_{n-1}-3a_{n-2}=0$ $(n≧3)$ をみたすとき

（i）a_n を a_{n-1} で表せ。$(n≧2)$

（ii）一般項 a_n を求めよ。

(3) $a_1=4$, $a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ で定められる数列 $\left\{a_n\right\}$ がある。

(i) すべての n に対して，$a_n\neq 3$ を示せ。

(ii) $b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ とおくとき，$\left\{b_n\right\},\left\{a_n\right\}$ の一般項を求めよ。

(4) 数列 $\left\{a_n\right\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，

$2a_n-S_n=3^n$ $\left(n=1,2,3\cdots\right)$ となる関係がある。一般項を求めよ。

exercise 【漸化式④】　　　　　　年　　組　　番 名前

◆◆◇　演習問題　◇◆◆

1. 数列$\{a_n\}$が次の関係式をみたすとき，一般項a_nを求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+1$

(2) $a_0=1,\ a_n=\dfrac{a_{n-1}}{3+a_{n-1}}$

(3) $a_1=10,\ \sqrt[3]{\dfrac{a_{n+1}}{10}}=a_n$

(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+n-1$

(5) $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+(-2)^n$

(6) $x_1=1,\ x_2=5,\ x_{n+1}=5x_n-6x_{n-1}$

(7) $y_1=1,\ y_2=\dfrac{1}{5},\ y_ny_{n-1}=5y_{n+1}y_{n-1}-6y_{n+1}y_n$

(8) $a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=3n^2-4n$

2. 数列$\{a_n\}$が，$a_1=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}}+\dfrac{2}{n+1}=1\ (n=2,3,4\cdots)$をみたすとき，

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$を求めよ。（東京学芸大学）

3. $a_1=1,\ b_1=3,\ a_{n+1}=3a_n+b_n,\ b_{n+1}=2a_n+4b_n$で定められる$\{a_n\},\{b_n\}$がある。

(1) $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$をみたす$\alpha,\ \beta$の組を２組求めよ。

(2) 数列$\{a_n\},\{b_n\}$の一般項を求めよ。（三重大学）

4. pを0でない実数とする。数列$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots$を次のように定義する。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n+p^{-1}\ (n=1,2,\cdots)$$

(1) $|p|=1$のとき，a_nを求めよ。

(2) $|p|\neq1$のとき，a_nを求めよ。（北海道大学・改）