

三角関数へのアプローチ

09.11.27

北海道八雲高等学校

吉田 奏介

1. はじめに

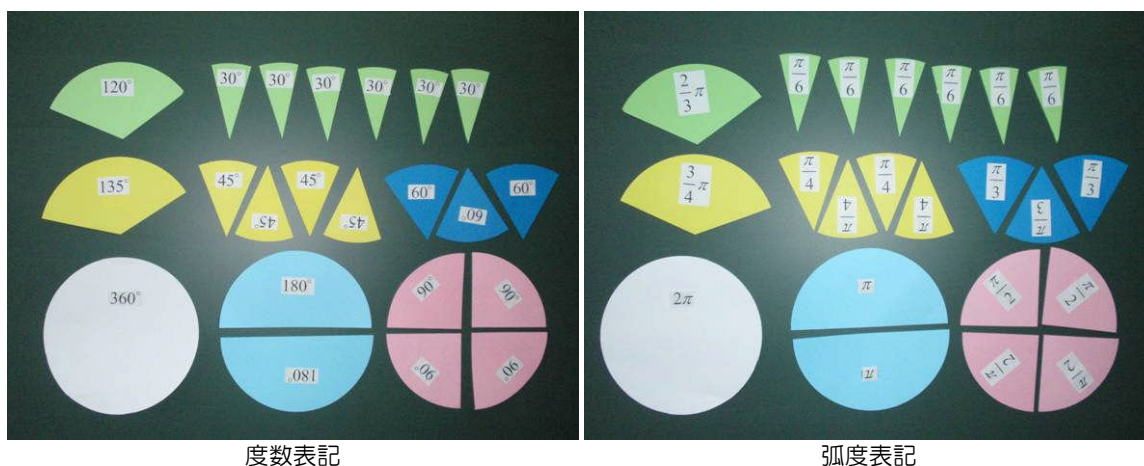
年度当初、数学Ⅱの実施にあたって悩むことがある。三角比からの引き続きとして三角関数から始めるか、それとも弧度法は後に回して整式の除法と分数式から始めるかと言ったことである。教科会でも検討したが、結局時間切れでいつも通り三角関数から行うわけで、年度当初から生徒は弧度法や性質、加法定理と公式相手に苦戦しているように思える。生徒にとって三角関数は、似たことをくり返し行っている分野というよりも、なんだか難しい分野だと感じているのではないだろうか。相互関係式など確かに三角比と通ずるところもあるが、弧度法や一般角の概念や、性質や加法定理、倍角、三角関数の合成と数多くの公式というものが理解を妨げているのではないだろうか。そこで少しでも生徒の理解を促すために何か良い方法はないか？というのが今回の発端である。

● 弧度法の導入

2. 弧度 \leftrightarrow 度数

三角関数の導入にあたって、最初の関門は弧度法(ラジアン)の概念の定着であろう。ラジアンを導入によって、扇形の計算が簡単に処理できたり、角の大きさを 30° がいくつ分といったように処理できたりと言ったメリットがある。しかし生徒は度数法に慣れ親しんでいるために、弧度法の表記を見てもわざわざ度数に直して、時間がかかったり、間違えてしまったりとデメリットとしてしかとらえていないように思われる。

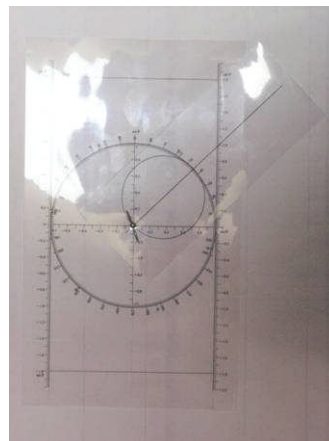
そこで小学校で度数の学習に用いられている掲示物を応用して図のようなものを作成した。度数と弧度を結びつけさせると同時に、大きな角であっても $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ を単位としてそのいくつ分かという感覚を養うことを目指したものである。



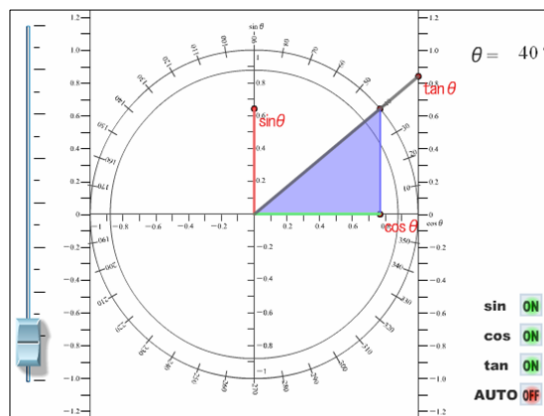
3. クルクル

角の大きさから三角関数の値を求めたり、その反対で三角関数の値から角の大きさを求めたりと三角関数を用いた求値の操作では、単位円や相互関係式の活用などの能力が求められる。その作業の前に、実際に生徒自身が作った教具で角の大きさと三角関数の値の関係が確認できれば、単位円もより身近なものになるのではないだろうか。

そこで活用が期待できる教材が「クルクル」である。江藤邦彦先生の著書に生徒自身が一から作る形で紹介されており、昔先輩の先生に印刷したものをを見せていただいた教材である。雛形を Flash で作成して OHP シートに印刷する方法を考えたが、OHP シートの用意や時数の問題などで紹介程度に終わってしまい、実際に授業の中で生徒が作って使ったとはできていない。使った生徒の感触は良さそうなので、今後授業への導入の方法なども検討していきたい。



また、このクルクルを Flash 上で提示したのが右図である。これ自体は紙の上の角に重ねることができるわけではないので便利とは言いがたいが、単位円上での角と三角関数の値の関係を全体に示すことができるのではないだろうか。

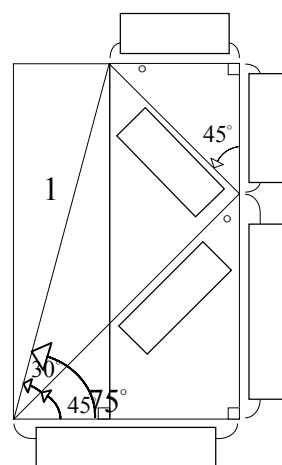


● 加法定理・三角比の合成

4. 身近な図から

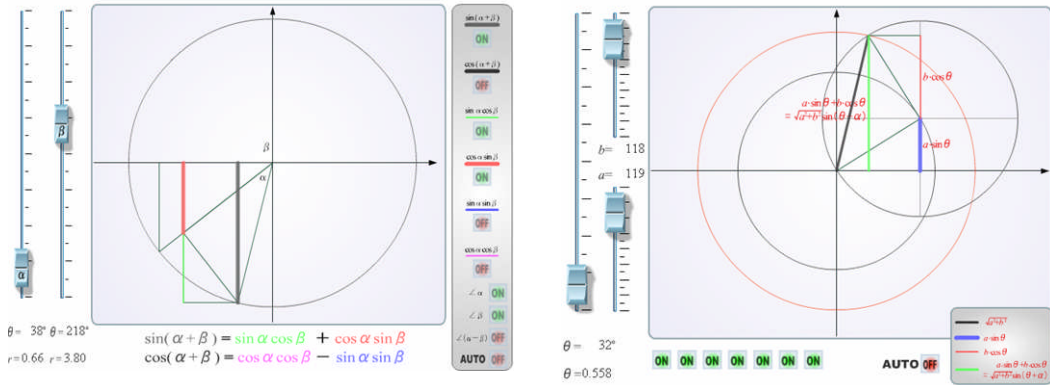
三角関数の後半戦最初の関門が加法定理ではないだろうか。「咲いたコスモス、コスモス咲いた」「コスモスコスモス、咲いた咲いた」「タン足は、1引くタンタン、タンタン」などと呪文のように唱えさせたり、右図のような特別な図形を用いることで加法定理が具体的な角度で図形的に成り立つことを示したりしている。

この図から説明すると生徒にとっては見慣れた図形の中に加法定理が成立するので多少は分かりやすいようであるが、他の角度における一般性については、厳密に行うのであれば図形を置き直すなどして行う必要があるのだろう。



5. FLASH の活用

そこで加法定理と三角関数の合成について、単位円内にどのように公式が現れるのかをFlashで示してみたものが下の2つの図である。Flashで示すことにより、公式の証明にはならないが、図形の中にどのように現れるかがわかり、さらにその図形を動かすことで一般的に成り立つことも直感的に理解することができるのではないだろうか。



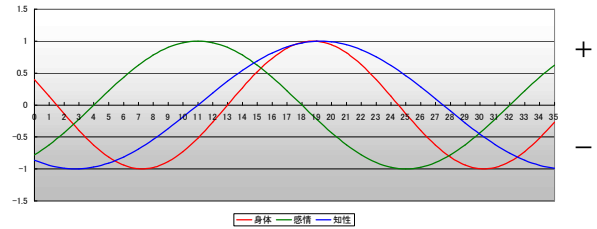
● 三角関数のグラフ

6. Biorhythm ~ バイオリズム

周期関数は音や光など物理分野の活躍の紹介もできるが、バイオリズムを導入に持ってくるのも面白いのではないだろうか。バイオリズムは身体・感情・知性の波長を示したものであり、最近はなかなか通じないことも多いが、占いなどが好きな子は何となく興味を持ってくれる。そこから周期関数の話を持って行く流れもよいのではないだろうか。

Biorhythmを調べる

今日は 1989 年 4 月 1 日 1976 年 1 月 1 日から 4840 日経過
 身体 $P = \sin(2\pi \frac{t}{33}) - \sin(2\pi \frac{t}{33})$ 感情 $S = \sin(2\pi \frac{t}{28}) - \sin(2\pi \frac{t}{28})$ 知性 $I = \sin(2\pi \frac{t}{33}) - \sin(2\pi \frac{t}{33})$
tを23,28,33で割った余りをそれぞれ p, s, i とする



※ 横軸と交わる付近の日は、要注意日（不安定日）！

■ Excel でのグラフの描画 ■

Excelのグラフではなかなか数学で活用するよなグラフがかけないと感じている人が多いのではないだろうか。今回描画に用いた方法は各座標を用意して「散布図」の「平滑線」で結んだ「マーカー無し」で描画する方法をとった。使い勝手がよいわけではないが一つの手段であろう。

	$2\pi = 6.283185$			
	日数変換	p	$2p = \pi * p/2$	sin
0	40032	12	3.278184	-0.13617
1	40033	13	3.551366	-0.3984
2	40034	14	3.824548	-0.63109
3	40035	15	4.09773	-0.81697
4	40036	16	4.370912	-0.94226
5	40037	17	4.644093	-0.99767

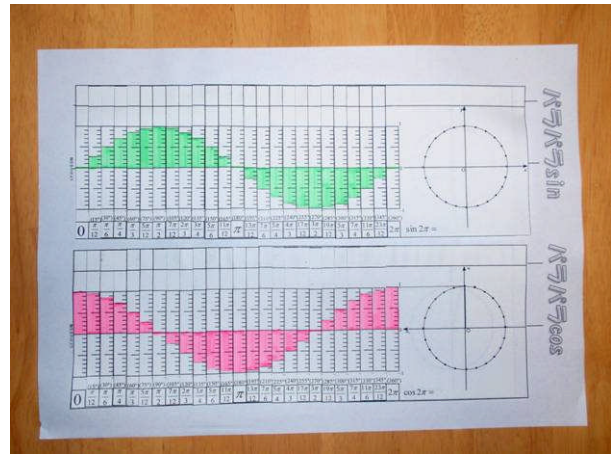


7. パラパラ

本校は今年度より2年生普通科が普通コースと進学コースにわかれてカリキュラムを展開している。そこで今年度普通コース A 組を担当している伊藤忠勝先生がグラフの指導でパラパラを利用していたので紹介したい。

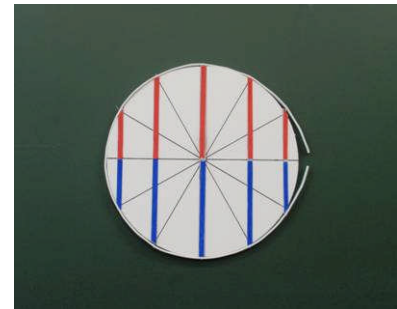
パラパラは、長野の西三サークルの和田博先生が発表されていたが、今回伊藤先生はExcelでプリントを作成し授業で

用いられた。これは生徒自身が作成の作業を通じて、角の動きにおける値の移り変わりを体験することができる教材であると思う。ただ難点としては作成に関して時間がかかってしまうところであろう（sin,cos 合わせると2時間半～3時間必要としたようである）。

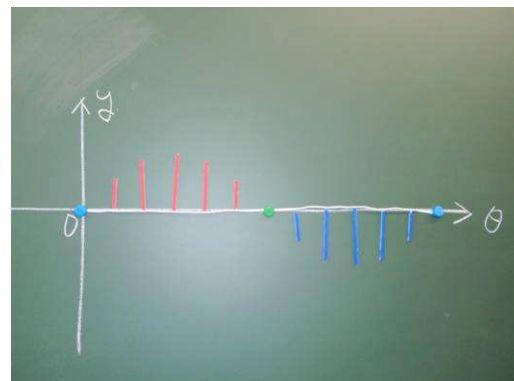


8. 単位円 → θ 軸

1次関数や2次関数の指導で軸の名前や値をしっかりとかかない生徒がいて注意することがあるが、三角関数でもやはりよく見られる。また慣習的に θ 軸ではなく x 軸とかく生徒もいたことを思い出していたところ、単位円と軸をリンクさせて示すことができるのではないだろうかと思い、この教材ができた。



グラフの θ 軸はどこを基準に考えているかを示すことで軸での間違いをなくし、グラフが半円にならないことや周期となることといった特徴を確認することができるので、表などを用いてグラフを打点していく前の概形を示す内に役立つのではないかと考えている。

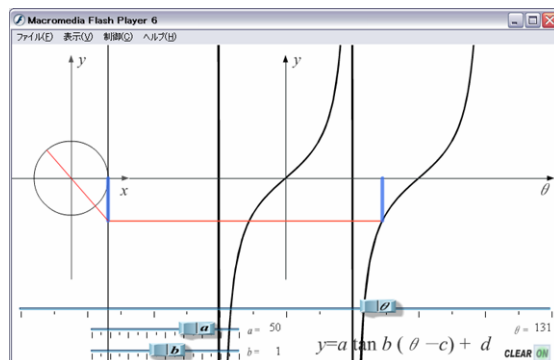
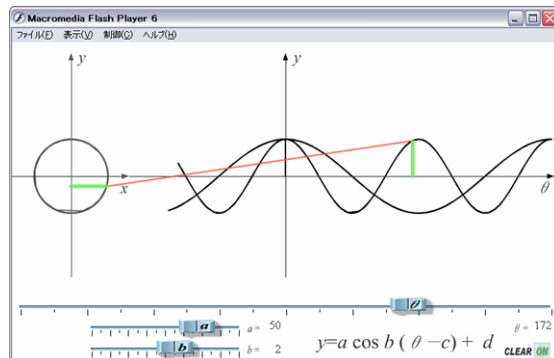
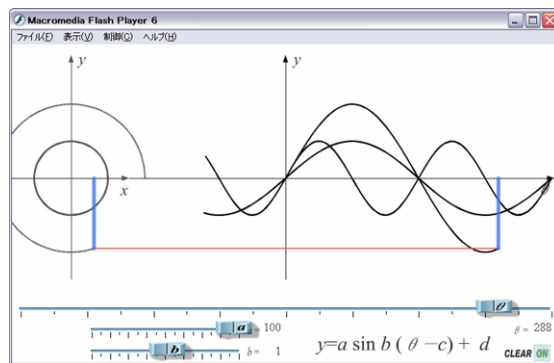


9. FLASH の活用

北数教大会のあと「数学のいずみに載せているマルチメディア教材の三角関数のグラフを使いたいのだが、未完成となっているので完成させて欲しい。」という話があり図のような形で完成させた。

機能は、グラフの描画と三角関数とラジアン
の係数の変化に絞ることで、操作を簡単にさせている。また、単位円とグラフについてどの値が対応しているかに重点を置いて作成している。

導入あたりで使う事を想定していたため、視点の変化を極力なくす方向で作成している。そのため、コサインにおける単位円とグラフの値の対応などは多少見づらくなっている。またプログラムの設定上、PC の処理が飛んでしまうとグラフも飛んでしまうなど課題とする点もあるのだが、今後使用したの感想を踏まえ改善を図り、他の関数のプログラムに活かしていければと思う。



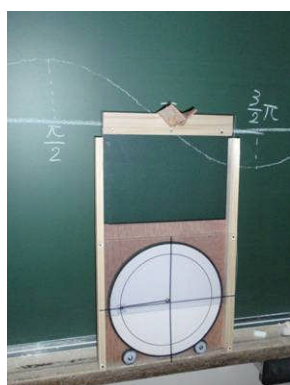
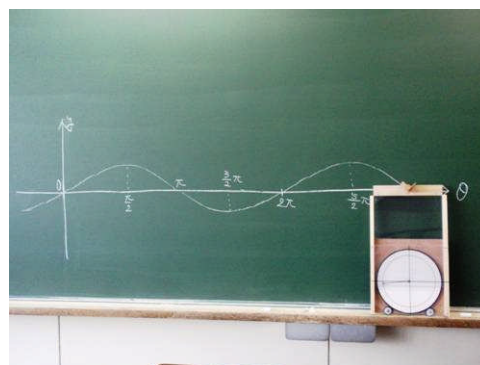
10. 「単位円」 + 「サインカーブ」

三角関数のグラフと単位円を結びつけて説明する際に、点を打たせて確認しながら行ったり、Flash で上手く説明できないものかと考えたりしたのだが、もっと良い方法がないものかと考えていたとき、目にしたのがマーゴの部屋(MARGo's room)というサイトで見た「ゴロゴロ」という教具であった。この「ゴロゴロ」はサインカーブを描く教具であり単位円は出てこないのだが、このアイデアを参考にさせていただき作成したのがこの教材である。



これは「ゴロゴロ」同様上部のペン置きにチョークまたはペンをセットしスライドさせていくことでサインカーブを描くというものである。多少ローラーがチョークで滑ったりしてしまうのだが、円の動きと連動して手の触れていないチョークがサインカーブを描いていくので、生徒は単位円とグラフの連動を感じることができる。

なによりこの教具の売りはグラフと単位円の連動である。実際にグラフを描いていく作業と単位円での点の動きを同時進行で示すことができることにより、単位円で考える意義や方程式や不等式を単位円かグラフのどちらで解いても良いことが分かるのではないだろうか。



また、ペン受けのチョークをグラフに合わせることで、単位円の動径とグラフの軸上の値の連動も確認することができ、3年生の振り返り等で使ったところでは好評を得られた。これもパラパラと同様、軸の見方を変えればコサインのグラフも作図することが可能ではある。

なかなかコロコロと動かない、周期を変えるなど、さらなる改善が必要なのだがとりあえず最低限のことは説明ができるものだと思う。

(参考：マーゴの部屋(MARGo's room) <http://www.hcn.zaq.ne.jp/robegorge/>)

11. おわりに

「5分で使う教材は5分で作る」

ということで手間のかからない教材を使うことが多いのだが、たまには手の込んだ教材というのも授業のアクセントとして良いものではないだろうか。手の込んだものは繰り返し使う事を考えれば5分とまではいかななくても、だいぶコストパフォーマンスは良くなるのではないだろうか。そして何より生徒が興味を持ち、こちらの授業に対する気持ちを汲んでくれると思っている。ただ、教材を使う以上『見せて終わり』とならないように気をつけなければいけないと肝に銘じている。

今回いろいろな教材を用いて三角関数の単元の内容にアプローチする方法を紹介してきたが、まだまだいろんなアプローチの仕方があるのでは?と考えていくのも面白いと感じた。また他の単元や、さらに掘り下げてなど、今後も継続していきたい。