

和の公式へのアプローチ

札幌旭丘高等学校 吉田 奏介

「人間は忘れる動物である」とはよくいうものだが、やはり覚えておかななくてはいけないことも多いものである。そのためにただ暗記していくのもよいが、それはそれでなかなか難しい。そこで「咲いたコスモス、コスモス咲いた」のように語呂合わせやリズムに乗せることで聴覚に訴えたり、図形などから視覚的に解釈したり、ひたすら繰り返し使うことで手に覚えさせたり、導かれる過程から理解しようとしてみたりと、様々なことを試してみるものである。

数列のなかでは多くの公式が出てくる。生徒にしてみたら「また覚えなきゃいけないのが多くなる...」といったところだろう。そこで少しでも効果的に頭に染みこんでくれるような工夫を以下にまとめていこうと思う。

1 $1+2+3+\dots+n$ の場合

まず教科書ではどうだろうか。等差数列の和のところでは次のような説明がなされている。

初項 a 、公差 d 、末項 l 、項数 n の等差数列の和 S_n を求めてみよう。

(中略) 図の示すように n 個の $a+l$ の和になるので

$$2S_n = n(a+l)$$

ゆえに
$$S_n = \frac{1}{2}n(a+l)$$

(中略)

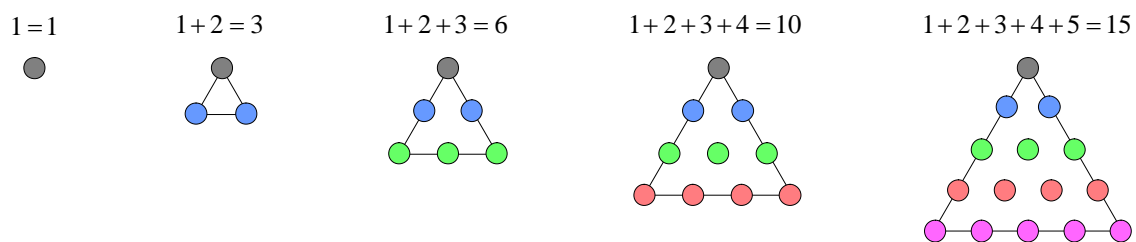
1 から n までの自然数の和は、初項 1、末項 n 、項数 n の等差数列の和であるから、次の公式が得られる。

$$1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

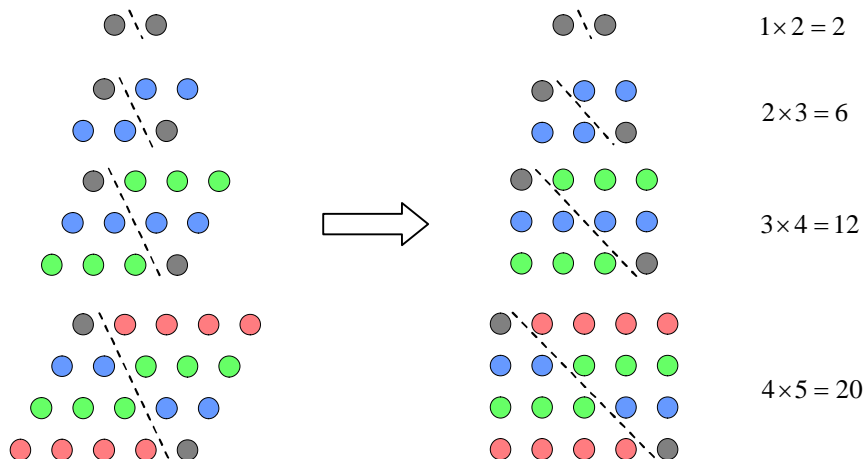
a	l		
$a+d$	$l-d$		
$a+2d$	$l-2d$		
.....			
$l-d$			$a+d$
l			a

等差数列の和の公式の導入に際し図を用いているが、自然数の和は公式の延長線上としてとらえられている。ここでは自然数の和について 2 通りのアプローチをはかってみたいと思う。

まず第 1 に、自然数を 1 から順に n まで加えた和を、三角数とみた場合である。自然数の和を順に三角形に図式化していくと、次の図のようになる。





次に、各三角形を 2 倍し片方を反転して組み合わせると、長方形ができあがる。

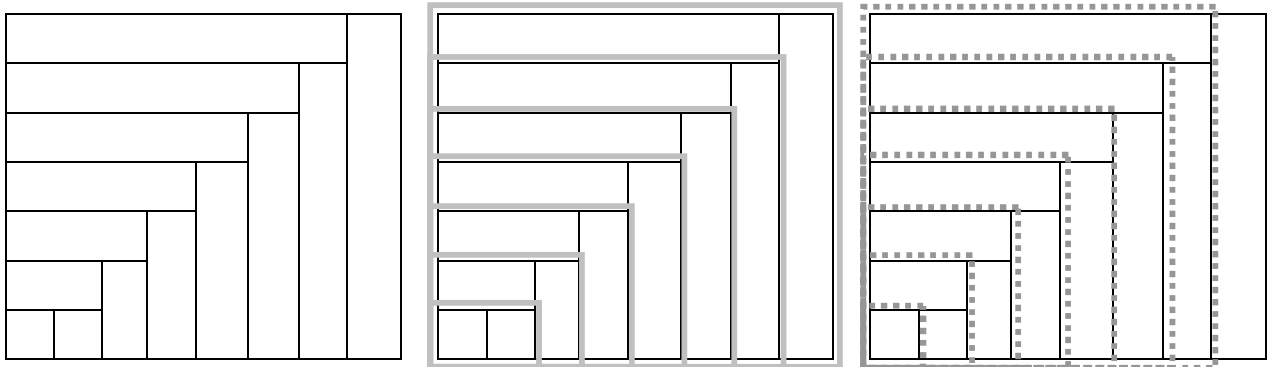


ここで、各長方形において縦×横の規則性を見ると $n \times (n+1)$ となっていることがわかる。したがって、自然数の和はこの半分ということになるので $\frac{n(n+1)}{2}$ ということになる。この方法はガウスのエピソードや博士の愛した数式などで有名な方法である。

第2に次の下左図のような四角形を用いる方法である。この四角形で

 の四角でくくると（下中央図） $1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ が導かれ、

 の四角でくくると（下右図） $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$ が導かれる。



いずれの方法も自然数の和を面積という視覚的要素を用いたり、長方形の面積という比較的簡単に生徒にとってもつきあいの長い公式に置き換えることでアプローチしている。

2 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ の場合

教科書では累乗の和のところ次のような説明がなされている。

等式 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ において	
$k=1$ とすると	$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$
$k=2$ とすると	$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$
$k=3$ とすると	$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$
$k=n$ とすると	$(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$
これらの辺々加えると	$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$
よって式を整理すると	
	$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

かなり略をしているが大抵の教科書はこのような流れで証明している。しかし生徒にしては何でこの式からといった感じがあるのも否めない。そこで累乗の和についていろいろなアプローチをはかってみたいと思う。

和の比較から比を用いる

自然数の和を S_n 、平方の和を T_n として、それぞれ第1項から第5項まで書き並べてみると次のようになる。

$$\begin{array}{ll}
 S_1 = 1 = 1 & T_1 = 1^2 = 1 \\
 S_2 = 1 + 2 = 3 & T_2 = 1^2 + 2^2 = 5 \\
 S_3 = 1 + 2 + 3 = 6 & T_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \\
 S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 & T_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 \\
 S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 & T_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55
 \end{array}$$

次に S と T で対応する和の比をつくり、約分して分母を3にそろえると次のようになる。

$$\frac{T_1}{S_1} = \frac{1}{1} = \frac{3}{3} \quad \frac{T_2}{S_2} = \frac{5}{3} \quad \frac{T_3}{S_3} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \quad \frac{T_4}{S_4} = \frac{30}{10} = \frac{9}{3} \quad \frac{T_5}{S_5} = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$$

ここで、それぞれの分子を見ると

$$3 = 2 \times 1 + 1 \quad 5 = 2 \times 2 + 1 \quad 7 = 2 \times 3 + 1 \quad 9 = 2 \times 4 + 1 \quad 11 = 2 \times 5 + 1$$

となることから、 n 番目の分子は規則性により $2n+1$ であり S_n を $\frac{2n+1}{3}$ 倍すれば T_n を求めることができる。

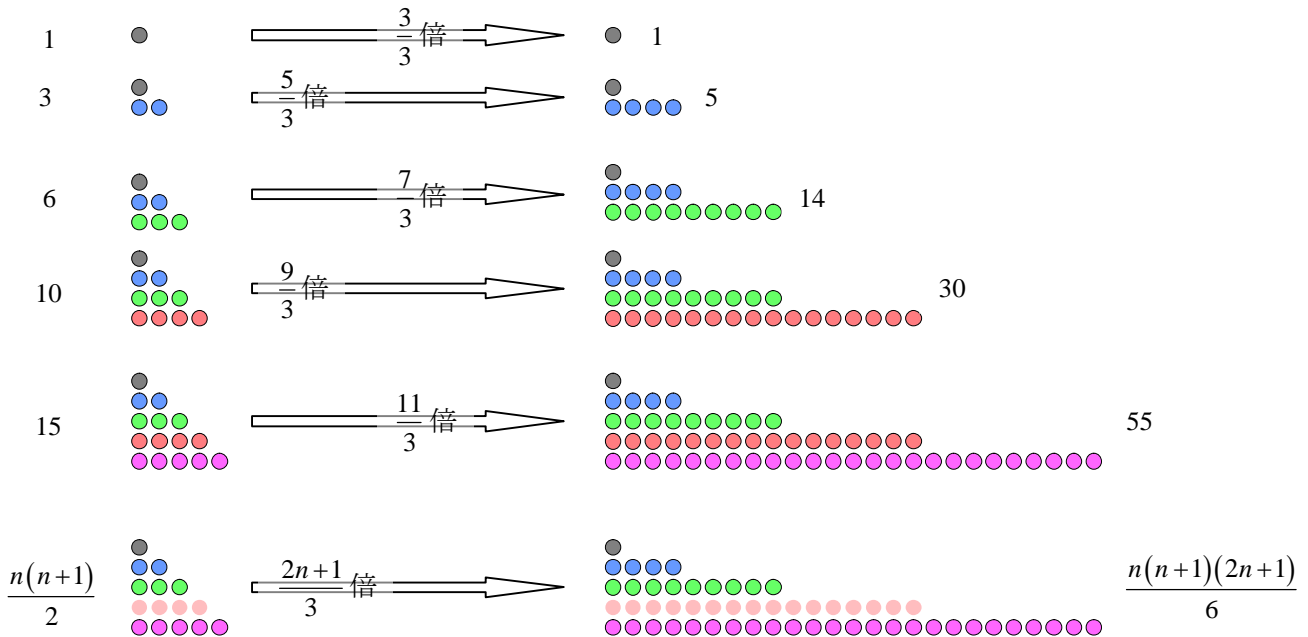
できることがわかる。つまり $S_n = 1+2+3+\dots+n$ を求める式 $\frac{n(n+1)}{2}$ に $\frac{2n+1}{3}$ をかければ

$T_n = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ を求めることができる。

よって

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{2n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

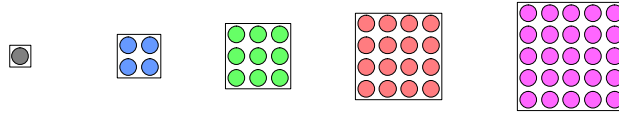
が導かれる。



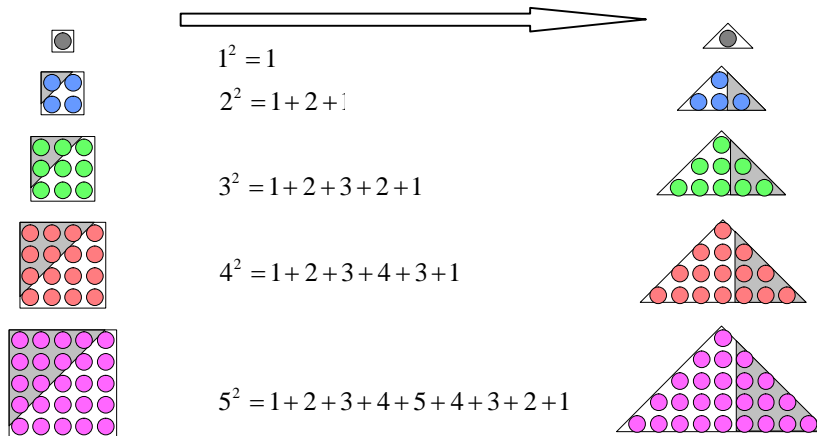
この方法は和を考えるのだから、和から推定する自然な発想ではないだろうか。

四角数の和を用いる

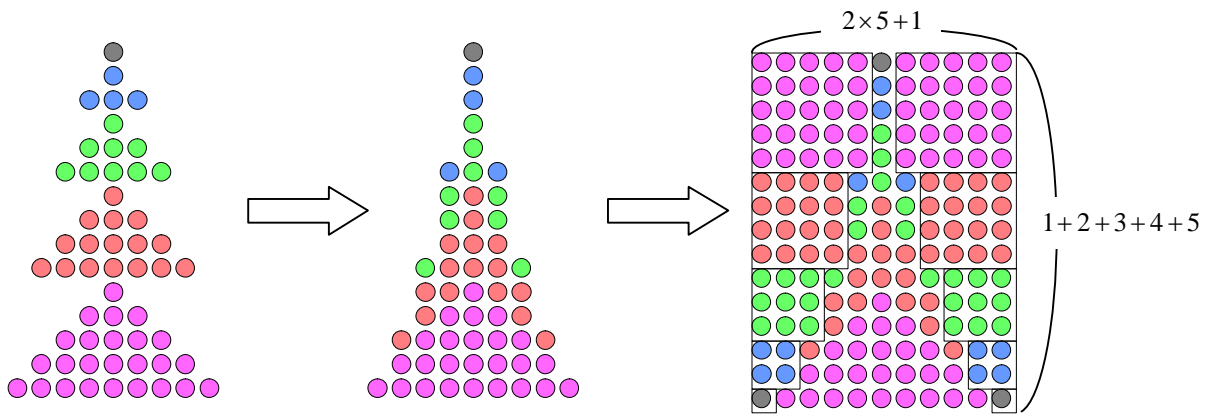
四角数は、下図のように $1, 4, 9, 16, \dots$ と n^2 の形で増加していく。



この各四角形について、辺の数の $(n-1)$ 個分の長さの辺を 2 本持つ二等辺三角形(図の灰色の部分)を組み替え、三角形をつくる。(下図右) このとき、各項は下図中央のように書き換えたこととなる。



前段階でつくった三角形を重ね、縦方向にスライドさせる。すると、今度は縦方向に $1+2+3+\dots$ といった和の形を見ることができる。そこで最初の四角数を 2 つずつ組み合わせると、 $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ が 3 つ分で縦が $1+2+3+4+5$ 、横が $2 \times 5 + 1$ の長方形ができあがる。



よって

$$3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = (1 + 2 + \dots + n)(2n + 1)$$

$$3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{n(n+1)}{2} \times (2n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

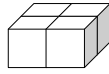
が導かれることとなる。これは 3 倍してさらにその内の一つを変形して隙間を埋めることは暗記の代償としてはやや大変な作業ではあるが、平方を面積と見るので自然な考え方ではある。

立体の個数に注目する

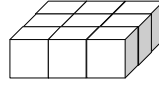
各平方の値を正方形の個数と考えると次のように考えることができる。



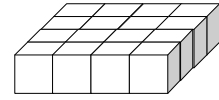
$$1^2 = 1 \text{ 個}$$



$$2^2 = 4 \text{ 個}$$

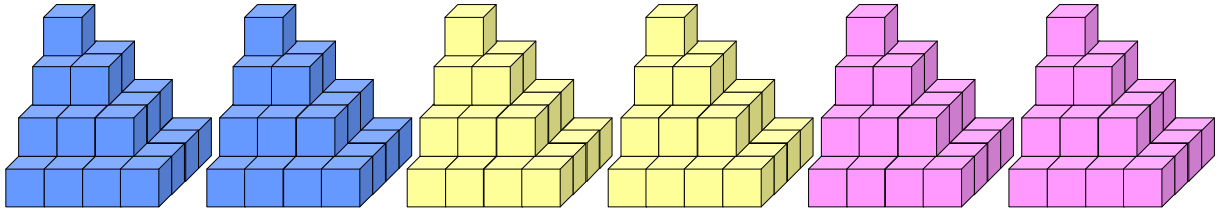


$$3^2 = 9 \text{ 個}$$

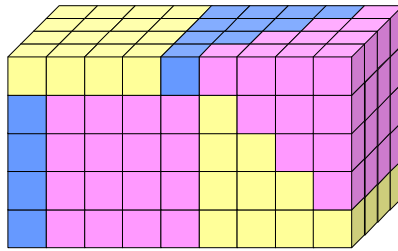


$$4^2 = 16 \text{ 個}$$

これらを積み重ねることにより次のような階段模型を6つ作る。



これをうまく組み合わせることで各辺が $n, (n+1), (2n+1)$ となる直方体ができあがる（下の図では 4, 5, 9 の直方体となる）。よってこの直方体の体積は $n(n+1)(2n+1)$ になる。よってもとの階段模型 1 個における立方体の個数はこの体積の $\frac{1}{6}$ であるので $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ であることが導かれる。

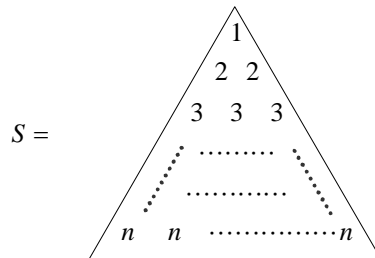


この操作は最初に 6 倍しなくてはならないが、実際の操作をさせてみるなどすれば理解が図れるのではないだろうか。

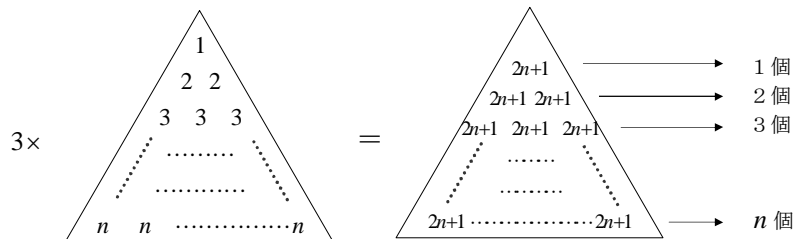
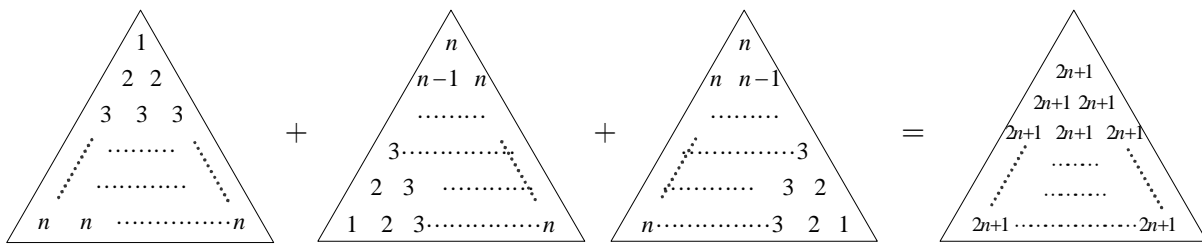
三角形の和をみる

$$\begin{aligned} S_n &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ &= 1 + (2+2) + (3+3+3) + \dots + (n+n+n+\dots+n) \end{aligned}$$

と平方の和を書き直して、これを正三角形に並べてみると次のようになる。



これを 120° ずつ、2 回回転させたものを作り和をとると、すべて $2n+1$ の項となる正三角形ができあがる。そこで $2n+1$ が何項あるかを調べれば S_n を求めることができる。

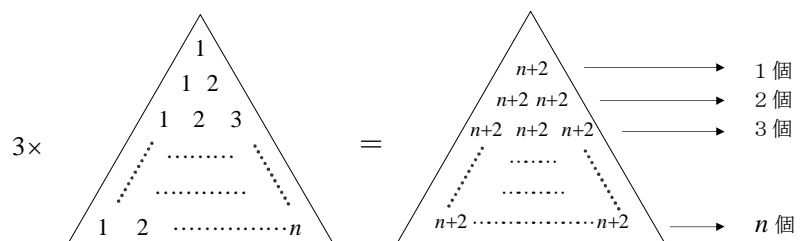
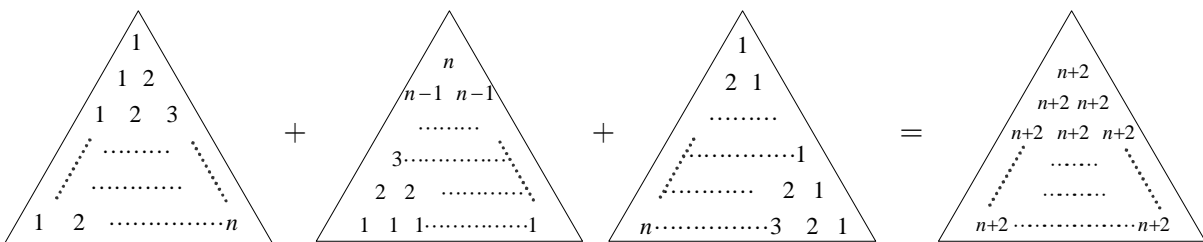


$$3S_n = (2n+1)(1+2+3+\dots+n)$$

$$S_n = \frac{1}{3} \cdot (2n+1) \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

この方法は、②の方法での3倍する作業を三角形の回転と結びつけることができ、具体的な数値を用いていながら視覚的に理解することができるのではないだろうか。

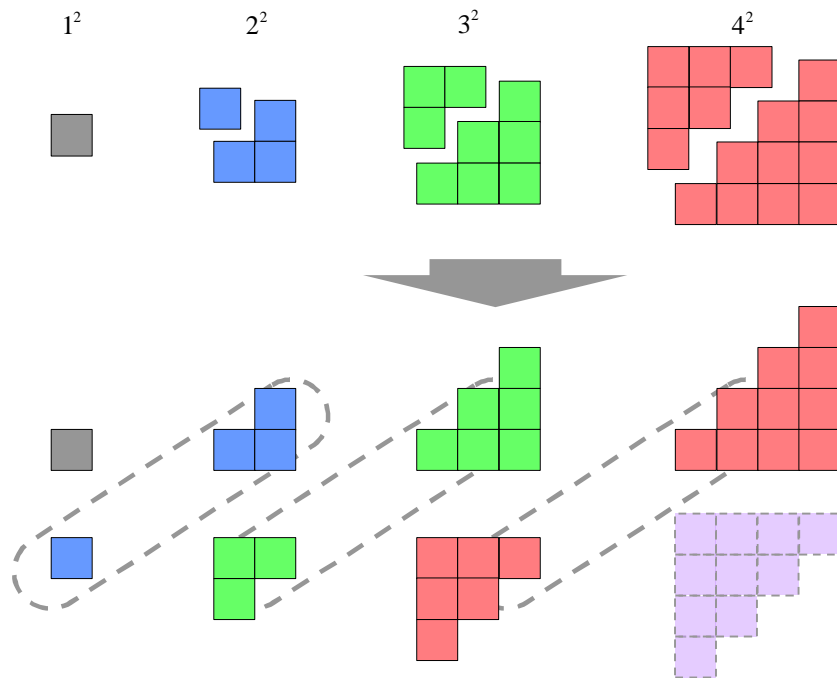
またこの考え方は、 $1, 1+2, 1+2+3, \dots, 1+2+3+\dots+n$ といった三角数の累計の和も次のように求めることができる。



$$3S_n = (n+2)(1+2+3+\dots+n)$$

$$S_n = \frac{1}{3} \cdot (n+2) \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

この三角数の累計の和が示されることにより、平方数の和に対して次のようなアプローチをすることができる。



$$\begin{aligned}
 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 &= 2\{1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+n)\} - (1+2+3+\dots+n) \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) \\
 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
 \end{aligned}$$

ちなみに、 n を真ん中にもつ連続する 3 整数の積 $T_n = (n-1)n(n+1)$ をもちいることで

$$T_{k+1} - T_k = k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) = 3 \cdot k(k+1) \quad \text{より} \quad k(k+1) = \frac{1}{3}(T_{k+1} - T_k) \quad \text{であるので}$$

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (T_{k+1} - T_k) = \frac{1}{3}(T_{n+1} - T_1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

これを半分にすることで $\sum_{k=1}^n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ と三角数の累計の和を導くことができる。

3 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ の場合

和を比較する

$1+2+3+4+5$ の和を S 、 $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$ の和を T として、それぞれ足していくと

$S_1 = 1 = 1$	$T_1 = 1^3 = 1$
$S_2 = 1 + 2 = 3$	$T_2 = 1^3 + 2^3 = 9$
$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$	$T_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$
$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$	$T_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$
$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$	$T_5 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$

左右で対応する数字を比べると、左は右のそれぞれ 2 乗になっている。

したがって、 $T_n = (S_n)^2$ になることから一般化すると

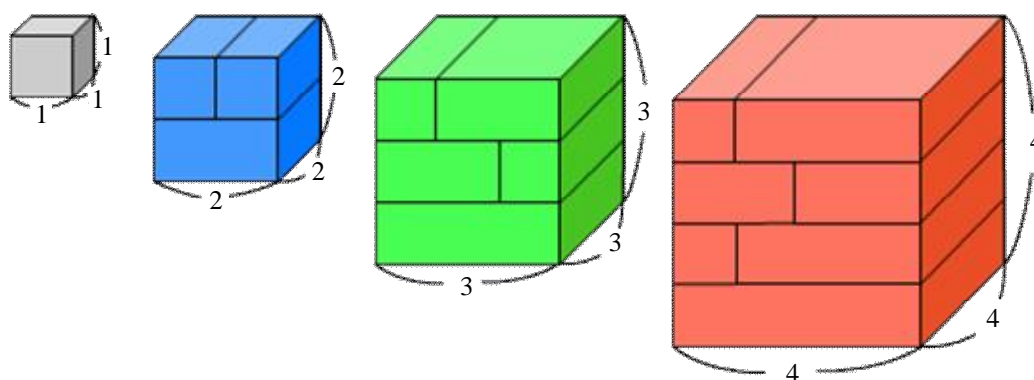
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

を導くことができる。

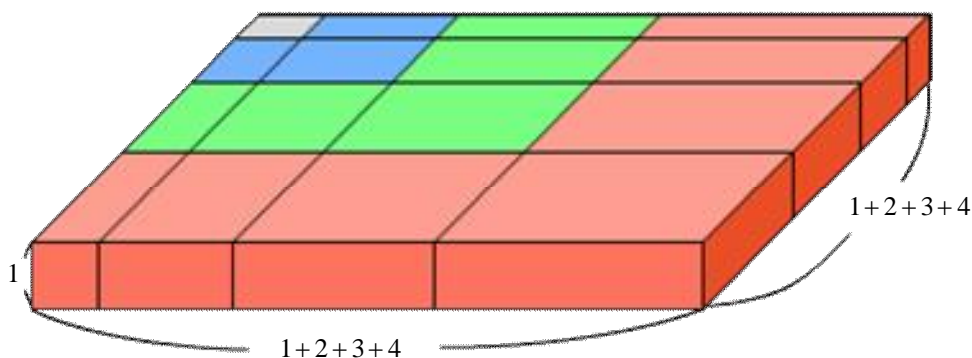
この方法は平方数でも紹介した方法であり、和を考えている以上和から推定するという、自然な考え方ではある。

立方体の体積を用いる

$1^3, 2^3, 3^3, 4^3$ を立方体の体積として考える。この各立方体を、高さ 1 にスライスし、さらに図のように細分化する。



これらの細分化したパーツを組み替え、高さ 1 の底面が正方形となる四角柱をつくと、1 辺が $1+2+3+4$ であり、さらにこの四角柱の体積は各立方体の体積の和と等しいことがわかる。



立方体の体積の和は $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ であり、正方形の板の体積は $1 \times (1+2+\dots+n)^2$ なので、

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$$

である。ここで、自然数の和は $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ であるので、

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

が、導かれることとなる。

4

 $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ の場合

べきの三角形

パスカルの三角形のようにだんだんと下の段を生成することができる。そのさい、下付き文字を掛けてから加えることがポイントとなる。

例えば5段目は上の段を参考に左から、

$$1 \times 1 = 1$$

$$1 \times 1 + 7 \times 2 = 1 + 14 = 15$$

$$7 \times 2 + 12 \times 3 = 14 + 36 = 50$$

$$12 \times 3 + 6 \times 4 = 36 + 24 = 60$$

$$6 \times 4 = 24$$

と、決めることができる。

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1_1 \\
 & & & & & 1_1 & 1_2 \\
 & & & & & 1_1 & 3_2 & 2_3 \\
 & & & & & 1_1 & 7_2 & 12_3 & 6_4 \\
 & & & & & 1_1 & 15_2 & 50_3 & 60_4 & 24_5 \\
 & & & & & 1_1 & 31_2 & 180_3 & 390_4 & 360_5 & 120_6
 \end{array}$$

べきの三角形は1番上の段から0次、1次、2次、…のべきの和を表しており、次のようになることが計算することで3次以降のべきの和を考えることができる。

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots + n^0 = 1_1 = 1 \times \binom{n}{1} = 1 \times n = n$$

$$1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots + n^1 = 1_1 + 1_2 = 1 \times \binom{n}{1} + 1 \times \binom{n}{2} = 1 \times n + 1 \times \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 1_1 + 3_2 + 2_3 = 1 \times \binom{n}{1} + 3 \times \binom{n}{2} + 2 \times \binom{n}{3} = 1 \times n + 3 \times \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} + 2 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned}
 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= 1_1 + 7_2 + 12_3 + 6_4 = 1 \times \binom{n}{1} + 7 \times \binom{n}{2} + 12 \times \binom{n}{3} + 6 \times \binom{n}{4} \\
 &= 1 \times n + 7 \times \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} + 12 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 6 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 &= 1_1 + 15_2 + 50_3 + 60_4 + 24_5 = 1 \times \binom{n}{1} + 15 \times \binom{n}{2} + 50 \times \binom{n}{3} + 60 \times \binom{n}{4} + 24 \times \binom{n}{5} \\
 &= 1 \times n + 15 \times \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} + 50 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 60 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 24 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 &= 1_1 + 31_2 + 180_3 + 390_4 + 360_5 + 120_6 \\
 &= 1 \times \binom{n}{1} + 31 \times \binom{n}{2} + 180 \times \binom{n}{3} + 390 \times \binom{n}{4} + 360 \times \binom{n}{5} + 120 \times \binom{n}{6} \\
 &= 1 \times n + 31 \times \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} + 180 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 390 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 &\quad + 360 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 120 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1)
 \end{aligned}$$

ここに上げさせてもらったもの以外にもさまざまなアプローチの仕方があるだろう。たんなる式演算や暗記だけではなく、このようにさまざまなアプローチをすることで生徒によりしっかりとした定着をはかることもできるのではないだろうか。

参考文献・サイト

Q.E.D. 証明が生み出す美の世界 バーガード・ポルスター

数学セミナー リーディングス 1982 新・高校数学外伝 日本評論社

数学玉手箱 早苗 雅史 <http://www.nikonet.or.jp/spring/sanae/MathTopic/MathTopic.htm>