

# 高専の教科書と高校数学(ラプラス変換)

北海道札幌稲雲高等学校 菊地 剛

2021年1月30日

## 概要

ラプラス変換は極限など厳密さを考慮しなければ、高校数学でも手の届く内容である。また、ラプラス変換の計算の中で出てくる部分積分、線形性、部分分数展開などは高校でも大事な内容であるが、有効さを再認識した。

## 1 1980年代の大学入試問題

定数分離形は教科書にも記載があったが、それ以外は誘導付きで出題されていた。

例1 誘導付きの入試問題(出題校は不明. 参考文献 [1] より)

$$y' + 2y = e^{-x} \cos x \quad (\text{ヒント 両辺に } e^{2x} \text{ をかけてみよ.})$$

左辺が積の微分の形になり解決する.

$$e^{2x}y' + 2e^{2x}y = e^{2x} \cdot e^{-x} \cos x$$

$$(e^{2x}y)' = e^x \cos x$$

$e^{2x}y$  を求め、最後に両辺に  $e^{-2x}$  をかけて  $y$  が求まる.

## 2 微分方程式

$\frac{dy}{dt} + y = e^t, y(0) = 1$  をラプラス変換を用いて解くことを目標とする.

## 3 ラプラス変換

### 3.1 定義

関数  $f(t)$  は、 $t > 0$  で定義され、実数の値をとる関数とする.

$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$  が存在するとき、 $F(s)$  を  $f(t)$  のラプラス変換という.

### 3.2 いくつかの具体例

例 2  $f(t) = 1$  のラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \times 1 \, dt = \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

例 3  $f(t) = t$  のラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \times t \, dt = \left[ \frac{e^{-st}}{-s} t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} \times 1 \, dt = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \times 1 \, dt = \frac{1}{s^2} \quad (s > 0)$$

例 4  $f(t) = e^{\alpha t}$  ( $\alpha$ は定数) のラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} \, dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} \, dt = \frac{1}{s-\alpha} \quad (s > \alpha)$$

### 3.3 線形性

与えられた関数  $f(t)$  を  $F(s)$  に対応させる写像を  $\mathcal{L}: f(t) \mapsto F(s)$ ,  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  などと表す.

関数  $f(t), g(t)$  にラプラス変換が存在するとき,

$$\begin{cases} \mathcal{L}[f(t) + g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)] \\ \mathcal{L}[kf(t)] = k\mathcal{L}[f(t)] \quad (k \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

が成り立つ.

### 3.4 導関数のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

$$\begin{aligned} \text{※部分積分より, } \int_0^{\tau} e^{-st} f'(t) \, dt &= \left[ e^{-st} f(t) \right]_0^{\tau} - \int_0^{\tau} (-s) e^{-st} f(t) \, dt \\ &= e^{-s\tau} f(\tau) - f(0) + s \int_0^{\tau} e^{-st} f(t) \, dt \end{aligned}$$

$\tau \rightarrow \infty$  として両辺の極限をとる.

### 3.5 逆ラプラス変換

関数  $f(t)$  のラプラス変換が  $F(s)$  であるとき,  $f(t)$  は  $F(s)$  の逆ラプラス変換であるといい,

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$  と表す.

例 5 例 3 の  $\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}$  ( $s > \alpha$ ) より

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-\alpha} \right] = e^{\alpha t}$$

## 4 2の微分方程式

$$\frac{dy}{dt} + y = e^t, y(0) = 1$$

解  $\mathcal{L}[y] = X(s)$  とすると、導関数のラプラス変換より  $\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sX(s) - y(0) = sX(s) - 1$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を行うと、

$$sX(s) - 1 + X(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$X(s) = \frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} \right)$$

$$\text{したがって, } y = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

## 5 まとめ

普段積分の計算をするときは特に意識せずに計算してしまっているが、ラプラス変換の計算のときは線形性などに気を付け、新鮮な気持ちで計算することができた。直接授業でラプラス変換に触れたりすることはないが、高校数学の先を見通して考えることができると感じた。

## 参考文献

- [1] 『解法の探求Ⅱ』(東京出版, 1986)
- [2] 『新訂応用数学』(大日本図書, 2005)
- [3] 國分雅敏『数学のかんどころ 13 ラプラス変換』(共立出版, 2012)
- [4] 奥村晴彦／黒木裕介『 $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$  美文書作成入門 改訂第8版』(技術評論社, 2020)

[2] は苫小牧高専の5年生の教科書であったと思われる.[3] は [2] よりも数学寄りの書籍ということで前半を少しかじってみた.[4] は数式を結城浩氏の数学ガール風にする際の参考にした。