

# 無理数であることの証明方法について

## ～解き方縛りのススメ～

令和5年11月25日

北海道網走桂陽高等学校

教諭 阿部 卓朗

### 1. はじめに

$\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。【2020年 神戸大学】

この手の問題は教科書や問題集に限らず、入試問題でもよくみられる。そのため、毎年平常講習や夏季講習、冬季講習などでは言語能力を高める目的も込めて、このような問題を取り上げている。

この手の問題を解く際にまず頭に浮かぶのは背理法であろう。実際、学習指導要領でも背理法を用いた証明が謳われている。教科書等に記載されていることもあり、ほとんどの高校では背理法のみを教えることが多いと考えられる。そこで、背理法に頼らずとも上記の証明を行う手法を紹介したいと思い、拙稿を執筆させていただいた。1年次に解かせてみるのも良いが、2年次に解かせてみて、数学の解法の幅広さとそれらを発見する面白さを実感させる方法も良いと考えている。

### 2. 背理法を用いない証明方法

拙稿では、2020年に神戸大学で出題された問題（1の冒頭で示した問題）を、背理法を用いない方法で解いていきたい。なお、この問題の前置きとして、

自然数 $a^2$ が5の倍数ならば、 $a$ は5の倍数であることを証明せよ。

という問題が設けられているが、この点は既知のこととして扱うこととする。

#### (1) 2次方程式を用いた解法

2次方程式 $x^2 - 5 = 0$ の解の一つは $x = \sqrt{5}$ である。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の有理数解を $\frac{p}{q}$ （ $p$ と $q$ は互いに素な整数）とおく。

**lemma**

2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の有理数解を  $\frac{p}{q}$  とおくと,  $q$  は  $a$  の,  $p$  は  $c$  の約数である.

ただし,  $p$  と  $q$  は互いに素な整数であるとする.

**(Proof)**

2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  に  $x = \frac{p}{q}$  を代入すると,

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0 \Leftrightarrow \frac{ap^2 + bpq + cq^2}{q^2} = 0 \Leftrightarrow ap^2 + bpq + cq^2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

ここで, ①の式を変形して

$$cq^2 = -ap^2 - bpq = p(-ap - bq)$$

これより,  $p$  は  $cq^2$  の約数である.

仮定より,  $p$  と  $q$  は互いに素であるため,  $p$  は  $c$  の約数である.

同様にして, ①の式を変形すると

$$ap^2 = -bpq - cq^2 = q(-bp - cq)$$

これより,  $q$  は  $ap^2$  の約数である.

仮定より,  $p$  と  $q$  は互いに素であるため,  $q$  は  $a$  の約数である.

したがって, lemma は証明された.

証明されたこの補題を認め, 有理数解があるとするならば,  $x^2 - 5 = 0$  の解は  $\pm 1$  あるいは  $\pm 5$  であるが, いずれもこの 2 次方程式の有理数解ではない. したがって, 有理数解は存在しない. ゆえに,  $\sqrt{5}$  は無理数である.

(2) 素因数分解を用いる解法

$\sqrt{5}$  が有理数であることは  $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$  を満たす整数  $a, b$  が存在するための必要十分条件である.

したがって,  $5b^2 = a^2 \cdots \textcircled{2}$  を満たす整数  $a, b$  が存在しないことを証明すればよい.

ここで、整数 $a, b$ を素因数分解したときの2の指数を考える。

すなわち、②の左辺を2で何回割ることができるか、右辺を2で何回割ることができるかを考える。すると、左辺は奇数回、右辺は偶数回2で割ることができる。この条件を満たすような整数 $a, b$ の組は存在しない。

それゆえに、 $\sqrt{5}$ は無理数である。

### (3) 正則連分数展開を用いる方法

#### **lemma**

有理数 $\Leftrightarrow$ 正則連分数展開が有限回で終わる

#### **(Proof)**

有理数をユークリッドの互除法で表すと、必ず有限回で終わる。これより、補題の十分条件を満たす。

対して、有限連分数は通分することにより $\frac{p}{q}$ の形で表すことができる。したがって、補題の必要条件を満たす。

これらより、*lemma*が成り立つ必要十分性が示された。

このことを用いて証明を行うこととする。

$\sqrt{5}$ を正則連分数展開すると、 $\sqrt{5} = [2.4]$ である。

上記の定理より、正則連分数展開が無限に続くので、 $\sqrt{5}$ は無理数である。

#### **【参考・引用文献】**

俣野・河野ほか 2021 数学II Standard 東京書籍.

<https://manabitimes.jp/math/1030> 2022年8月1日閲覧.