

微分で One More Think!

～積の微分法の活用について～

令和 7 年 7 月 30 日
北海道網走桂陽高等学校
教諭 阿部 卓朗

1. はじめに

数学Ⅲを教えていて、「あー教科書の方法面倒くさいなー、というかワンパターンすぎて飽きたなー」と感じたことが拙稿の発端である。基本的に、現任校で数学Ⅲを選ぶ生徒は北見工大や室蘭工大など国公立大学に進学を希望するか、芝浦工業大や明治大、中央大など比較的難関な私立大学を目指す生徒が多数なこともあり、できる限り公式の成り立ちや別解を詳しく示すことにしている。

今回は、数学Ⅲの微分法を教えているときに考えたことをまとめた内容を紹介したい。

2. 問題と一般的な解法

$y = (\log x)^2$ を微分せよ。

$$\text{(解)} \log x = t \text{ とおくと, } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \text{ であるから, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2t \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\log x}{x}$$

として、求める。合成関数とみなして微分する方法が教科書には記載されているし、おそらく一般的な解法だろう。

しかしながら、これ以外にもないだろうか？ とふと考えた。

3. 別解の方法

合成関数とみなしての微分が面倒だと感じた私は、次の方法で微分することを考えた。

$y = (\log x)^2 = \log x \times \log x$ と捉えて、積の微分法を用いる。

すると、

$$y' = (\log x)' \cdot \log x + \log x \cdot (\log x)' = \frac{\log x}{x} + \frac{\log x}{x} = \frac{2\log x}{x}$$

となる。

4. 別解から生まれた疑問

何のことはない、ただの積の微分法を用いただけではあるが、解釈を変えるだけで、解法は複数存在する。

しかし、これは2乗の場合だけしか使えないのではないだろうか？

3乗の場合は？ 4乗の場合は？ n 乗の場合は？

そこで、3乗の場合について考察する。

$y = f(x)g(x)h(x)$ を微分することを考える。

このままでは微分することはできないので、 $f(x)g(x) = p(x)$ とおく。

すると、積の微分法より

$$y' = p'(x)h(x) + p(x)h'(x) \cdots \textcircled{1}$$

となる。

$$p(x) = f(x)g(x) \text{であるから, } p'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \cdots \textcircled{2}$$

②を①に代入して、

$$\begin{aligned} y' &= \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}h(x) + \{f(x)g(x)\}h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

となるから、3乗の場合であっても積の微分を用いて、微分することができる。

面倒ではあるが、4乗の場合も同様に定式化することで、積の微分法を用いて求めることができる。(面倒だから誰もしようとしなないかもしれないが)

n 乗の場合は項の数が n 個になる。

天邪鬼な考え方かもしれない。効率的ではないかもしれない。エレガントでもないかもしれない。しかしながら、面白そうだったから考えてみた。

数学をする楽しさの一つは、面白いから考えることではないだろうか。

失礼ながら、先生方に一つ問題を出させていただく。

$y = a_1(x)a_2(x)a_3(x) \cdots a_n(x)$ とする。このとき、

$$y' = a_1'(x)a_2(x)a_3(x) \cdots a_n(x) + a_1(x)a_2'(x)a_3(x) \cdots a_n(x) + \cdots + a_1(x)a_2(x)a_3(x) \cdots a_n'(x)$$

となることを示せ。