北海道算数数学教育会高等学校部会第 108 回数学教育実践研究会レポート

数学史にまつわるエトセトラ (1)
―古代バビロニア編―

北海道札幌東陵高等学校　川嶋　哲典

2019 年 1 月 26 日

1　はじめに

1.1　3 年ぶりの数学活用担当

今年度，3 年ぶり 2 回目の「数学活用」を担当する機会に恵まれた．

前回の反省を踏まえて，また忘れてしまったことも多く，よりいっそう教材研究に励んで授業に臨んだ．その過程で，3 年前から気になっていたことなのだが，数学史を扱う際に読んでいた本の中で次のようなことが指摘されていた．そこで今後の中・長期的課題として，これらをさらに調べていこうと考えた．本レポートはその 1 つに関するノートである．

1.2　近年の数学史学の成果

最近の数学史学における成果として，中村滋 (2015) は次の 4 点を指摘している：

(1) 古代バビロニアにおいて円周率として 3.15 が使われていた可能性の発見

(2) 古代ギリシアで太陽系の運行を計算し表示する最古の運航模型 (アナログ計算機) が作られていた

(3) フェルマーの生年が 1607 年だった

(4) 円周率計算でよく使われた「マチンの公式」を見つけたマチンが，ほかにも円周率の計算公式を見つけていた

(中村, 2015, p. i)

今回はこの (1) の点を調べ，これまでに明らかにされていることを整理してみた．

従来の数学史では，古代バビロニアにおいては円周率の近似値として 3 あるいは 3.125 が用いられていたと考えられていた (カジョリ, 1997, p.68；ルーニー, 2013, p.94 など).

しかし近年，先述のとおり，古代バビロニアでも円周率の近似値として 3.15 も用いられていた可能性が指摘されている．この可能性を提示したのは，日本の数学史家・室井和男氏である．氏は,「プリンプトン 322」を完全解明した数学史家として有名である．

2　バビロニア文明と数学

2.1　バビロニア文明と数学

メソポタミアとは，ユーフラテス川とティグリス川の両大河に挟まれた地域という意味由来がある (図 1)．このメソポタミアの北部はアッシリア，南部はバビロニアと歴史上区分されているが，バビロニアの最南部シュメールでは，B.C.3200 年頃にシュメール人が人類史上初めて文字（楔形文字）を使った文明を築いたとされている (室井, 2014, p.40).

メソポタミアの歴史は，ほとんどが戦争の歴史と思えるくらい戦いが多かったが，その最大の要因の一つは，シュメール地方の穀物生産の高さにあったと思われる．つまり，豊かな土地を巡って外敵の侵入が絶えなかったのである．為政者は軍備と共に，耕地の維持管理に関しても書記に様々な計算をさせていた．その書記の中には，日常の業務に必要な四則計算の範囲を超えて，数の持ついろいろな性質を研

究し,「バビロニアの数学」と今日呼ばれるものを創り出した者までいたのである (室井, 2014, p.40).

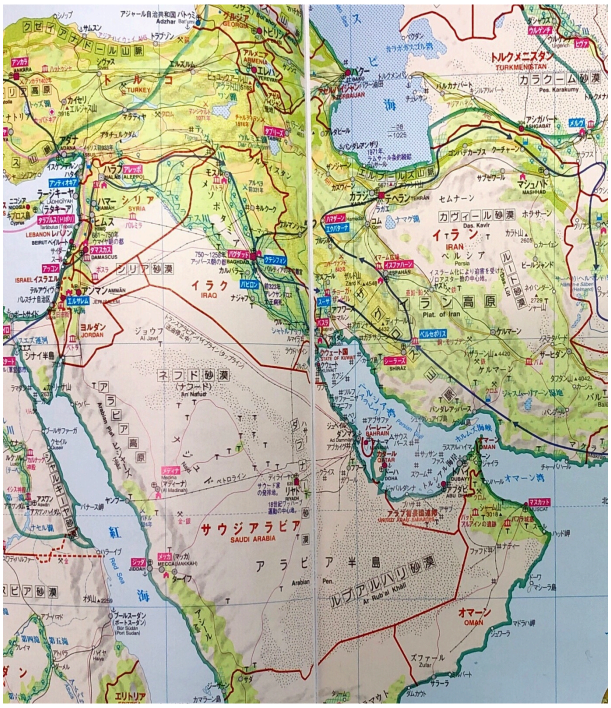

図 1　地図 (帝国書院編集部, 2012, pp.35-36)

2.2　バビロニアの数学の特徴

このバビロニアの数学について，室井 (2000) は，数学を現実的な問題に応用するというよりも，数についての理論や，方程式を解くことそのものに興味をもっていたことにあるとしている．

四角形の面積を概算する“測量士の方法”と呼ばれる方法（2 組の対辺の平均同士を掛け合わせる方法で，長方形のときには正しい面積になる）について，どうやら 2 組の対辺の平均同士の積から，展開した積の和を引くと 0 になることを確かめているようだと報告している．これは，古代バビロニアにおいて早くも式変形による「代数学的な“証明”」の萌芽が見られるといえる．

このようなバビロニアの数学の特徴を，室井 (2000) は次のようにまとめている：

(1) 数の持つ多くの性質を探求した合理的な精神.
(2) 代数計算を重視し図形の性質探求への無関心.
(3) 多数の数表を用いた巧妙にして効率的な計算.
(4) 融通性と形式的計算の繰返しによる定理理解.
(室井, 2000, pp.129-133)

3　円周率の近似値

3.1　円の面積公式

シュメール人は，円の面積公式を $\dfrac{1}{4\pi}c^2$(c : 円周の長さ) として計算していた．これは，古バビロニア時代 (B.C.2000-1600 頃) の数学文書では多く確認されている (室井, 2017).

室井 (2017) によれば，この公式は経験的に求めたということはあり得ず，次のように推測している：

$c = 2\pi r$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}c^2 &= \frac{1}{2}\times c\times\frac{c}{2\pi}\\ &= \frac{1}{2}\times 2\pi r\times\frac{2\pi r}{2\pi}\\ &= \frac{1}{2}\times 2\pi r\times r\end{aligned}$$

つまり，円の面積を底辺の長さ $2\pi r$，高さ r の直角三角形 (図 2) の面積と考えていたのではないかという推測である．

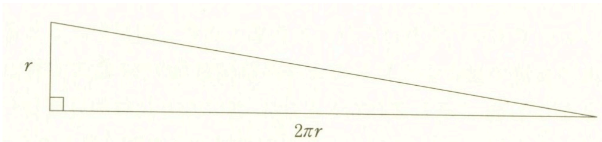

図 2　底辺の長さ $2\pi r$，高さ r の直角三角形
(室井, 2017, p.45)

これは，円を正 n 角形で近似しようとするとき，ごく自然に出てくる考え方であり，バビロニア数学でも円がそれに内接する正六角形や正七角形とともに描かれた図が残されていることから，室井は最も可能性がありそうであると指摘している (室井, 2017, p.45).

3.2　弓形の問題

大英博物館所蔵の粘土板 BM85194 には，弧の長さが 60，弦の長さが 50 である弓形 (円を線分で切り取った三日月形) の面積 (図 3) を求める問題がある．それは次のように書かれていた：

> 三日月．円弧が 60，弦が 50．面積 [は，いくらか]．君は [次のようにせよ]．円弧の 60 は 50 をどれだけ超過するか．10 超過する．50 を超過 10 に掛けよ．君は 500 を見る．

弦《超過の誤り》10 を平方せよ．君は 100 を見る．500 から 100(ママ) を引け．君は 450(ママ) を見る．面積は 400 と 50 サル《面積単位》．手順は，[このようである]．(中村, 2015, p.30 を一部改変．[ ] は補足，《 》は説明)

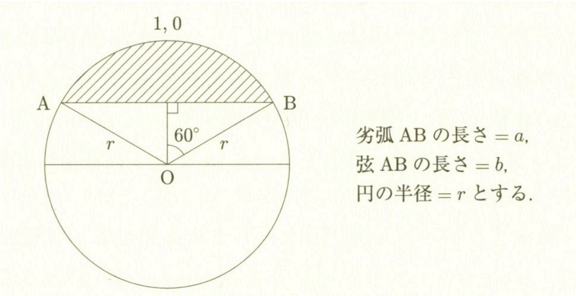

図 3 弓形の面積 (室井, 2014, p.63)

中村 (2015) も指摘しているように，この文には明らかな矛盾が見られる．

弧の長さを a，弦の長さを b，面積を S とするとき，言葉の上では

$$S = b(a-b) - (a-b)^2$$

としながら，実際の計算については

$$S = 500 - 10^2 = 450$$

と書いているのである．この公式の解明に向けて，室井 (2014) は試行錯誤を繰り返して面積の計算過程を明らかにしていったのである．その過程を以下に紹介する．

(1) $a = 60,\ b = 50$ のとき中心角は $\theta \fallingdotseq 118°$ であり，$a = 60,\ \theta = 120°$ とすると $b \fallingdotseq 49.62$ となる．この結果から $a = 60,\ \theta = 120°$ と推測する．
(2) バビロニアで一般に使われていた近似値 $\pi = 3$ と $\sqrt{3} = \dfrac{7}{4}$ を用いると，円の半径 r が，

$$円周 = 2\pi r = \frac{360}{120} \cdot 60 = 180$$

より $r = 30$ になる．したがって，弦の長さ b は

$$b = 2r \sin 60° = 30\sqrt{3} = 30 \cdot \frac{7}{4} = 52.5$$

となり，面積は

$$S = \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{r}{2} = 900 - \frac{1575}{4} = 506.25$$

になる．室井 (2014) は，この弦の長さ b と弓形面積の 2 倍 $2S$ が“牛の目”と呼ばれる図形の表 (図 4) にあることを発見したのである．

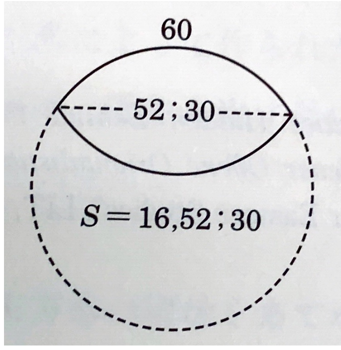

図 4 牛の目の図 (中村, 2015, p.31)

(3) ここで，($\pi = 3$ ではなく)$\pi = 3.15$ と仮定すると，半径 r は，

$$円周 = 2\pi r = \frac{360}{120} \cdot 60 = 180$$

より $r = \dfrac{200}{7}$ となり，弦の長さ b は

$$b = \sqrt{3} \cdot \frac{200}{7} = \frac{7}{4} \cdot \frac{200}{7} = 50$$

となる．このとき面積は，

$$S = \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{r}{2} = \frac{6000}{7} - \frac{2500}{7} = 500$$

となる．

以上のような考察により，室井 (2014) は，中心角 120° のときに一般的に成り立つ面積の近似公式として

$$S = b(a-b)$$

が使われた可能性があると推定している (室井, 2014, pp.63-64；中村, 2015, pp.30-31)．

まとめると，(1) で考えていたように，この問題では $\theta = 120°$ のとき，b の真の値は $\dfrac{90\sqrt{3}}{\pi}(\fallingdotseq 49.62)$ であり 50 にかなり近く，円周率 π の近似値の精度が高いことが暗示されるのである．ここでは，$\sqrt{3} = 1.75$ としていたと仮定すると $\pi = 3.15$ となる．だが，この数値はまだ他の数学文書では確認されていない (室井, 2014, p.64)．

4　まとめに代えて

以上のとおり，室井 (2014, 2017) が解明したように，古代バビロニアでは円周率の近似値として 3.15 も考えられていた可能性が大いにある．

しかしその一方で，実際の計算においては，円周率は 3 とされていたケースが多かったようである．このことについて，室井 (2000) は次のように述べている：

> バビロニアの数学では，ほとんどの場合，円周率は 3 であった．これはバビロニア人がより精密な値を計算できなかったというよりも，3 の方がいろいろな計算が簡単にできて便利だったから常に用いられたといった方がよい．彼らの関心は，円周率のより正確な近似値を求めることではなく，円に関する様々な長さや面積をどうやって計算するかにあったのである．(室井, 2000, p.56)

先述のとおり，古代バビロニアにおいて $\pi = 3.15$ と近似したケースは，現存の史料では限られているようではあるが，以上のような室井氏の研究の結果から，バビロニアにおいても円周率の近似精度はかなり高かったものと考えなければならないのではないかと思う．

参考文献

[1] 室井和男 (2000).『バビロニアの数学』, 東京大学出版会.

[2] 室井和男 (2014).「古代バビロニアの数学」．中村滋・室井和男.『数学史：数学 5000 年の歩み』, 共立出版, pp.40-82.

[3] 室井和男 (2017).『シュメール人の数学』, 共立出版.

[4] 中村滋 (2015).『数学史の小窓』, 日本評論社.

[5] カジョリ, 小倉金之助 (補訳)(1997).『初等数学史 (復刻版)』, 共立出版 (原著 1896 年).

[6] アン・ルーニー, 吉富節子 (訳)(2013).『数学は歴史をどう変えてきたか』, 東京書籍 (原著 2008 年).

[7] 帝国書院編集部 (2012).『地歴高等地図』, 帝国書院.