北海道算数数学教育会高等学校部会第124回数学教育実践研究会　2023. 1.28

数学史にまつわるエトセトラ(2)

～数学史の見方としての“共時性”，数学と文化，数学観と数学教育観～

北海道札幌西陵高等学校　川嶋　哲典

1. はじめに：数学史研究の新たな視点

平野(2003)は，数学史研究における 2 つの新たな視点として，“通時的”(diachronic)な視点および“共時的”(synchronic)な視点からのアプローチを提唱している(p.258)．とりわけ筆者は，後者の共時的アプローチについて関心を持った．そしてこれは，数学教育にも関係する大変重要な視点ではないかと考えるに至った．

本レポートは，筆者がそう考えるに至った観点とその経緯をまとめたノートである．

2. 数学史研究における“共時性”

(1) 通時的視点と共時的視点

平野(2003)は「通時的視点」と「共時的視点」について，それぞれ次のように説明している．

通時的視点：

> 文明の諸相を考える際に，それらが過去から長い年月にわたって築かれてきた結果であるとする捉え方を意味する．すなわち，時間の流れを基軸とし，過去の表層に現れたり真相に隠されたりするものを現代に意味づけることである．(平野, 2003, p. 259)

共時的視点：

> ある時代のある文明に見られる出来事を時間的流れにおける進歩や発展の一過程として捉えるのではなく，その文明自体を一つの総体─価値の総体─とみなし，その領域の中で個々の出来事を位置づけることを意味する．(平野, 2003, p. 259)

従来，数学史では学説史や理論史などのように，通時的視点からのアプローチによって記述されてきたものが多かった．その一方で平野(2003)は，共時的視点の必要性を次のように説明している．

> 数学が人間の叡智の創造物であり，それ故に文明を理解する上での一つのキー・エレメントであると考えると，われわれは，数学をも含めて社会や共同体全体を見ることが必要になる．それは，人間の文化や生活様式，その社会における科学や技術などと同様，数学を一つの要素として内部に包含している“様々な価値の総体”として社会や共同体を眺めることになる．ここに，“共時的”(synchronic)な視点の必要性が生じる．(平野, 2003, p. 259)

もう少し具体的に考えると，たとえば古代の種々の文明で栄えてきた“数学”（エジプト，バビロニア，ローマ，中国，インド，和算などなど）を，単純に時代順（＝通時的）に並べて議論しても，それにはあまり意味がない．当時は，おそらく文化圏の交流は現在ほど盛んではなかったであろうし，即時性も現在とは段違いであることは明らかである．また，これらの“数学”を取り上げて，同時代の西欧数学との優劣を論ずるようなことは，数学や数学史の学問的意義からしても重要なこととは思えない．むしろ，これらの“数学”は時代性や地域性を有することに鑑み，「それぞれの文明や文化の中でこそ明らかになる」(平野, 2003, p. 260)という視点が必要になる．これが共時的視点の意義である．

このようなアプローチを経た後，「全体として通時的な時間軸の上で再度吟味されることとなり，そこに数学史が存在する」(平野, 2003, p. 260)のである．

(2) 共時的視点の意義

以上のような，通時的視点と共時的視点の効果的な組み合わせによるアプローチによって，数学

史は「数学内部の理論的発展とそれに関わる外的要因とを総合した全体史的アプローチの可能性」(平野, 2003, p. 260)を帯びることとなる．

では共時的視点からのアプローチが有する意義はどこにあるのだろうか．今日では，数学の特徴として抽象性や普遍性が挙げられることがしばしばである．しかし冷静に考えてみると，最初から現在の“数学”のような形であったわけではないことは当然である．人間の社会生活の中では，具体的な問題を解決するための手段としての性格を備えていたはずであり，それらがやがて余分な部分が削ぎ落とされ，今日の数学の形になって行った(平野・中村, 2014, p. 45)．このことを，平野・中村(2014)は次のように説明している．

> 歴史経緯を考えると，数学が始原的に普遍性を備えていたという推察は必ずしも正しくはない．普遍的な数学の形成がヨーロッパ中心主義の下でこそ成し得たというのはある意味で事実としても，ヨーロッパにおいてでさえ，数学はその当初から「論理的構築物」として成立していたわけではない．逆に，結果としてヨーロッパ中心主義の下で整理された普遍的数学は，人間の生活や文化に結びついた原始的な性格をもはや失ってしまっていると考えるのが妥当である．(平野・中村, 2014, p. 45)

3. 認知的能力の状況依存性と文化

これまでの認知科学における研究から，認知的能力は文脈や状況に依存する (状況依存性) が示されている．

例えば，リベリアの農夫の読み書き能力，リベリアの仕立屋の数学的技能，ニューヨーク地域の乳製品業者の見積もり能力などが研究され，学校教育を十分に受けていなくても，自分たちが慣れ親しんだ文脈に置かれた時，高度な認知的活動をすることが示されている．学校の算数のペーパーテストで成績が低い人であっても，スーパーマーケットでの買い物やダイエット計算などの日常の場面では，同じ内容の計算問題であっても優れた能力を発揮することも示されている．

例として，コール(2002)らによる，リベリアの新数学プロジェクト(1960 年代)を参照する．コールらは学校を訪問した際に，クペル族の子どもたちは次のようであったと記している．

> 数学も，完全に記憶の問題だと堅く確信しているようだった．教室は，教室で例として $2+6=?$ のような問題を出して，後でテストで $3+5=?$ という問題を出すと，生徒たちは，授業でやっていない問題だからテストが不平をこぼしていた．(コール, 2002, p.101)

一方でこの民族の生活は，「学校教育の導入によって支えようとしている現代的な経済部門によってではなく，土着の文化的実践によって組織されている」，「米，屠殺肉や布のような伝統的な品々から，乳児用混合ミルク，金物や建物物品のような現代的商品に至るまで，あらゆる種類の品物が売買されていた．タクシーバスでは，……マイルの計算，道路の質，自動車のタイヤの質，乗客の数，距離，これらを彼らに都合よい単純な公式で計算するのに，何の困難もないように見えた」(p. 101)と分析している．

すなわち，十分な学校教育を受けておらず，数学用語や公式に馴染みがなく，仕事や日常で算数・数学の知識を使っているという意識がなくても，仕事や日常の中でそれぞれに適した形で「数学化」の過程があり，知識や概念が形成されていると考えることができる(関口, 1997, p. 17)．ブラウンら(1989)は，学習とは文化適応であるということを次のように説明している．

> 不幸にして，生徒たちはあまりにしばしばある学問分野の道具を，その［学問分野の］文化に順応できないままに，使用することがもとめられる．ある道具を実践家が使うのと同じように使うのを学ぶためには，生徒は，見習いのように，その共同体と文化へ入らなければならない．こうして，重要な意味において，学習とは文化適応(enculturation)である，と私たちは信じる．(Brown, Collins, & Dugid, 1989, p. 33；邦訳は関口, 1997, pp. 157-158 によった)

また，ビショップ(2011)も数学教育は「定型的な数学的文化化」(p. 155)であるとし，その目標は「数学文化の言語・記号化，概念化，及び諸価値に子どもたちを誘うこと」(p. 155)であり，「一定の知識枠

の中で遂行される社会的相互作用の過程として概念化される必要があるが，その知識枠の再創造と再定義という目標をもたねばならない」(p. 156)としている．

4. 数学観と数学教育観

このように「人間の生活をとおした諸活動が数学形成を導いてきた」(平野・中村, 2014, p. 46)と考えるならば，その基本思想は，アリストテレス的数学観（形式主義）に依っているものと考えることができる．

ここでプラトン主義と形式主義の対立についてまとめておきたい．これは，「数学とは何か？」，すなわち，「数学はそれだけで独立して存在しているのでしょうか．それとも，それが記述している事物と必然的に深く関係しているのでしょうか．数学は創造されるものなのでしょうか，それとも，発見されるものなのでしょうか．」(アーテシュテイン, 2018, pp. 61-62)という哲学的問題に対して，ギリシャ古典期にプラトンとアリストテレスが取り組んだとされるものである．

例えばアーテシュテイン(2018)は，プラトンとアリストテレスの解釈について，それぞれ以下のように説明している．

プラトンの解釈：

> 数学はそれだけで独立して存在しているのです．数学は，それを発見する人々にも，それが記述している現象にもかかわりのない抽象的な世界—イデアの世界—において存在しています．

アリストテレスの解釈：

> 数学は独立した実体としては存在しないと主張しました．数学は三段論法に基づく論理操作の結果にすぎず，探求は公理から始まります．数学は創造されるのであって，発見されるのではありません．
>
> (アーテシュテイン, 2018, p. 62)

これらの数学観の違いがもたらす帰結として，湊(2018)は数学教師の数学教育観を整理している．

外在的数学観（プラトン的数学観）：

> 講義型授業，問答型授業（分解的問答法），

内在的数学観（アリストテレス的数学観）：

> 自立解決・討論型授業，（開発的問答法）．
>
> (湊, 2018, p. 11)

5. オーセンティックな学習

関口(1997)は，「子どもに馴染みの文脈からかけ離れたかたちでテストが考案された場合には，子どもの知的能力の極めて限られた領域しか調べていない危険性がある」(p. 17)として，テストの在り方に対して問題提起している．すなわち，テストが背景としている西欧文化に馴染みのない文化にいる子どもの能力を過小評価することになってしまう．

さらにこの知見は，学校数学の授業の在り方にも再考を迫っていると考えられる．このことを関口(1997)は次のように説明している．

> 教室での学習活動の文脈がかなり限定されている場合には，そこで身につけた能力は実際には応用の利かないものになる危険性がある．例えば，教師からの一方的な説明，ドリル，型にはまった真実味のない文章題を中心とした受動的な学習活動で身につけた能力は，動的で複雑な現実の問題解決の文脈ではほとんど役に立たないことになると考えられる．
>
> (関口, 1997, p. 17)

近年，学習指導要領の改訂によってコンピテンス・ベースの学習が目指されている中において，オーセンティックな学習が主張されている．その基本的な考え方は，奈須(2017)によれば次のようなものである．

> 具体的な文脈や状況を豊かに含みこんだ本物の社会実践への参画として学びをデザインしてやれば，学び取られた知識も本物となり，現実の問題解決に生きて働く．
>
> (奈須, 2017, pp. 167-168)

また小野(2022)は，オーセンティックな学びの効能として，次の 3 点を挙げている．

> ① 子どもたちのもつ多彩でインフォーマルな既有知識の活性化が期待される
> ② 転移可能な学力の形成が期待される
> ③ 学問的な研究者と同型な思考の様式（学問固有のアプローチ）を身に付けられる
>
> (小野, 2022, pp. 290-291)

6. まとめと今後の課題

まとめると，筆者は数学史研究の“共時的”視点に着目し，そこから文化の重要性，すなわち学習は文化適応であり，数学的文化化の理論に言及した．

また，学習が文化適応であるとすると，数学教育における数学はアリストテレス的数学観（形式主義）に依るべきであり，生徒たちが数学を作り出す授業，すなわち自力解決・討論型授業が相応しいということを述べた．このような状況の中で，近年，オーセンティックな学びが提唱され，注目されていることに言及した．

しかし一方で，今般の学習指導要領改訂の際にも明示されているとおり（図 1），学校数学の学習は【現実の世界】と【数学の世界】の往還によってなされるものであり，筆者もそうすべきであるとも考えている．

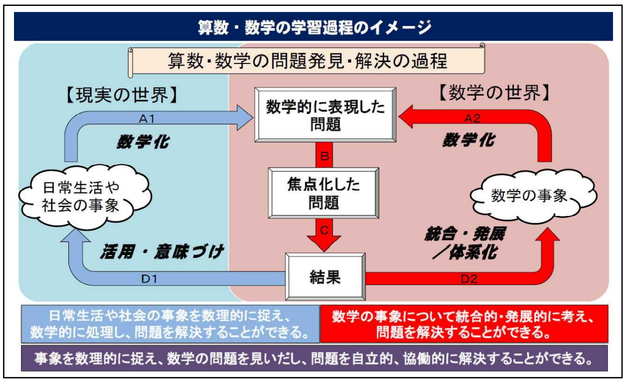

図 1　算数・数学の学習過程のイメージ
（文部科学省, 2017, p.23）

また，現実の課題から数学が発展したものとは別に，数学の世界の中での発展も現に認められているはずである．特に，抽象度が上がっていく高等学校数学においては後者の成果も多いはずである．したがって，本稿での主張をすべて取り入れていくことが最善であるとは考えていない．ただ，このような視点があるということを理解しておいたうえで，教材研究や授業の方法を豊かにすることができるならばまずは一つの成果なのではないかと考えている．

引用・参考文献

アーテシュテイン, Z,（2018）. 落合卓四郎監修・植野義明ほか(訳)『数学がいまの数学になるまで』. 丸善出版.

Brown, J.S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated congnition and the culture of learning, *Educational Researcher*, 18(1), pp. 32-42.

ビショップ, A.J. (2011). 湊三郎(訳)『数学的文化化』. 教育出版.

コール, M (2002). 天野清(訳).『文化心理学』. 新曜社.

平野葉一(2003).「西欧数学形成の諸断面」. 小川束・平野葉一,『数学の歴史：和算と西欧数学の発展』. 朝倉書店, pp. 133−270.

平野葉一・中村朋子(2014).「学問史から見た数学の展開」. 東海大学文明学会『文明研究』, 第 33 号, pp. 41−54.

クライン, M (2011). 中山茂(訳).『数学の文化史』. 河出書房新社.

湊三郎(2018).「算数・数学の授業三型論：その正統版として」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第 100 巻, 第 8 号, pp. 3-13.

文部科学省(2017).『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 数学編』. 日本文教出版.

奈須正裕(2017).『「資質・能力」と学びのメカニズム』. 東洋館出版社.

小野健太郎(2022).『オーセンティックな算数の学び』. 東洋館出版社.

関口靖広(1997).「認知と文化：数学教育研究の新しい方向」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第 79 巻, 第 6 号, pp. 14-23.