

## 1 はじめに

令和5年度後期中間試験「数学A」にて、正答率1.4%であった問題を紹介したい。出題意図は、

- 条件付き確率の求め方の確認
- 期待値の求め方の確認
- 場合分けを行い、整理できるか

の3点であった。出題した結果として、サイコロの問題の分母は6という固定観念が正答を妨げているようであった。

問題は、2022年度第1回全統記述模試を1部改変して出題した。以下、元題と改題を紹介する。

## 2 元題

1つのさいころを振り続けて、同じ目が2回連続して出たら終了するものとする。

- (1) ちょうど3回で終了する確率を求めよ。  
 (2) 5回以下で終了する確率を求めよ。  
 (3) 各回において、2の目が出たら2点、それ以外は1点を得るものとする。各回で得た点数の終了時における合計をSとする。(i)ちょうど3回で終了し、かつ、Sが4で割り切れる確率を求めよ。(ii) 5回以下で終了するとき、Sが4で割り切れる確率を求めよ。

**解答** (1)  $\frac{5}{36}$  (2)  $\frac{671}{1296}$  (3) (i)  $\frac{5}{216}$  (ii)  $\frac{307}{1342}$

**略解**

(1) ちょうど3回で終了する場合の確率は、 $\frac{6 \cdot 5 \cdot 1}{6^3} = \frac{5}{36}$

(2) 事象A: 5回で終了しない。 とすると、 $P(A) = \frac{6 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{6^5} = \frac{5^4}{6^4}$  である。

5回以下で終了する確率は、Aの余事象であるから、 $1 - \frac{5^4}{6^4} = \frac{671}{1296}$

(3) (i) ちょうど3回で終了し、かつ、Sが4で割り切れるのは、1回目に2が出て、2, 3回目に2以外の目が続けて出る確率であるから、 $\frac{1 \times 5 \times 1}{6^3} = \frac{5}{216}$

(ii) B: Sが4で割り切れる事象 とすると、求める確率は、 $P_{\bar{A}}(E) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(A)}$  である。

また、 $n$ 回目で試行が終了し、Sが4で割り切れる確率を  $P(B_n)$  と表すこととする。

**【A】** 2回で終了するとき、 $P(B_2) = \frac{1}{36}$

**【B】** 3回で終了するとき、(3) (i) より  $P(B_3) = \frac{5}{216}$

**【C】** 4回で終了するとき、2が1度も出なければ良いので、 $P(B_4) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1}{6^4} = \frac{5}{81}$

**【D】** 5回で終了するとき、2が3度出れば良い。1~2回目のうち、どちらかで2の目が出て、4, 5回目に2の目が出るので、 $P(B_5) = \frac{1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1}{6^5} + \frac{5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1}{6^5} = \frac{5}{864}$

**【A】 ~ 【D】** より  $P_{\bar{A}}(E) = \frac{1}{36} + \frac{5}{216} + \frac{5}{81} + \frac{5}{864} = \frac{24 + 20 + 5}{864} + \frac{5}{81} = \frac{307}{2592}$

したがって、 $P_{\bar{A}}(E) = \frac{307}{2592} \div \frac{671}{1296} = \frac{307}{1342}$

### 3 改題

1つのサイコロを振り続けて、同じ目が2回連続したら終了するものとする。また、各回において、2の目が出たら2点、それ以外なら1点を得るものとする。各回で得た点数の終了時における合計をSとすると、4回で終了するとき、Sの期待値を求めよ。

**解答**  $\frac{14}{3}$

**略 解**

4回で終了するとき、目の出方の総数は、 $6 \times 5 \times 5 \times 1 = 150$  通りである。

サイコロの点数を（1回目の得点、2回目の得点、3回目の得点、4回目の得点）とあらわすことにすると

[1] S=4 のとき (1,1,1,1)

よって、S=4となる目の出方は、 $5 \times 4 \times 4 \times 1 = 80$ 通りである。

[2] S=5 のとき (2,1,1,1)または(1,2,1,1)

よって、S=5となる目の出方は、 $1 \times 5 \times 4 \times 1 + 5 \times 1 \times 5 \times 1 = 45$ 通りである。

[3] S=6 のとき (1,1,2,2)

よって、S=6となる目の出方は、 $5 \times 4 \times 1 \times 1 = 20$ 通りである。

[4] S=7 のとき (2,1,2,2)

よって、S=7となる目の出方は、 $1 \times 5 \times 1 \times 1 = 5$ 通りである。

[1] ~ [4] より、4回で終了する確率は以下の表のとおりである。

S	4	5	6	7
P	$\frac{80}{150}$	$\frac{45}{150}$	$\frac{20}{150}$	$\frac{5}{150}$

以上より 期待値は  $\frac{4 \times 80 + 5 \times 45 + 6 \times 20 + 7 \times 5}{150} = \frac{700}{150} = \frac{14}{3}$

### 4 まとめ

生徒の答案を見てみると、 $\frac{4 \cdot 80 + 5 \cdot 45 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 5}{6^4} = \frac{175}{324}$  や、 $\frac{6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1}{6^4} \times 4(\text{回}) = \frac{25}{54}$  と答えた生徒が複数人

いた。いずれにしても、サイコロの問題は分母が6である前提で進めている生徒がほとんどであった。