

ジェルゴンのカードマジック

0. 研究動機

先日、数学研究部が「合同文化祭(*1)」というイベントに参加し、「世界の数え方ツアー」というテーマでステージショーを行った。その際、ショーを盛り上げるために「進数を利用したマジック」として、標題のマジックを披露した。マジックの数理が巧妙であり、かつ、好奇心を高めるものであったことから、課題研究等で利用していただきたいと思い、レポートにまとめてみた。

1. 概要

「ジェルゴン(*2)のカードマジック」は、27枚のカードで山を作り、指定されたカードを指定された場所に移動するマジックである。同様のマジックはテレビ等でもよく見かけるが、このマジックの長所として、

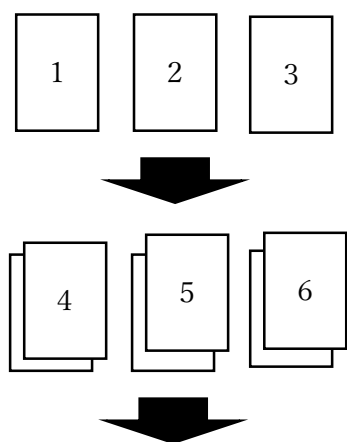
- ①完全マジック(*3)であること
 - ②指定されたカードを見ずに移動できること
 - ③簡単な操作だけで移動できること
- が挙げられる。

2. 手順

(1) 全体

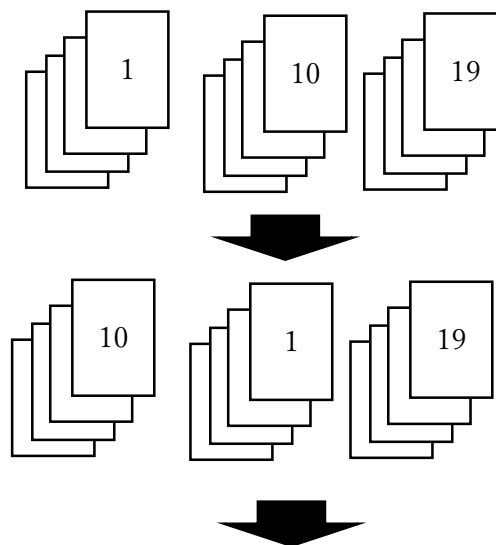
- ① 27枚のカードの中から相手に1枚カードを選んでもらい、そのカードを憶えてもらう。
- ② 相手に移動してもらいたい場所(上から○番目)を聞く。
- ③ ①のカードを見ずに、27枚の中に混ぜて、裏向きのカードの山を作る。
- ④ 「Transpose」を行う。
- ⑤ 「Set」を行う。
- ⑥ ④⑤を2回繰り返す。
- ⑦ 相手に上から○番目のカードを見せ、最初に選んだカードかを確認する。

③ Transpose… 3山に分ける



繰り返し(9枚×3列まで)

④ Set…列を入れ替えて、1山にする。



1山にまとめる

(2) カード操作「Transpose」(以後「T」と表記)

カードの山の上から順にカードを取り、「左→中→右」の順にカードを置き、3つの山を作る。

(3) カード操作「Set」(以後「S」と表記)

① 相手に3つの山を確認してもらい、選んだカードが入っている山を指定してもらう。

② ①の山を3進数から割り出した位置(上中下のいずれか)に入れて、1つの山にする。

(4) 上記 ②における位置の求め方

	(例)「指定場所」=18 の場合
① 指定された場所(上から○番目)から1を引く	$18-1=17$
② ①の数を3進数に変換する	$17(10)=122(3)$
③ 2桁目を「0なら2」「2なら0」に書き換える	$122 \rightarrow 102$
④ 各桁の数を10進数と見なし、各桁の数に1を足す	$102 \rightarrow 213$
⑤ 桁の順序を逆順にする	$213 \rightarrow 312$
⑥ 「1=上 2=中 3=下」と見なし、 左の桁から順に位置を読み取る	$312 \rightarrow$ 下上中

3. 数理

原理は以下の3つ。

- (1) 1つの山にまとめたときの、上から数えた位置を3進数(000~222)で表現する。
- (2) 操作「T」によって、3進数の位の数が互いに入れ替わる。
- (3) 操作「S」によって、3進数の特定の位の数を書き換えることができる。

(原理のイメージ)

(○ △ □) → (□ ○ △) → (△ □ ○) → (○ △ □)
 * 「→」=「操作S」 * 「下線部」=「書き換えられる位の数」

4. 3進数の位置情報

上からの位置は1~27番目まで存在するが、
 このまま3進数変換すると、001~1000となり、
 4桁表示となってしまいうため、位置の数から1を引いて、
 3桁表示とする。(右図)

3進数と位置の対応表

上	000	100	200
	001	101	201
	002	102	202
	010	110	210
	011	111	211
	012	112	212
	020	120	220
	021	121	221
下	022	122	222

すると、各桁の数は
 (1桁目 2桁目 3桁目) = (列番号 行グループ番号 行番号)
 に対応する。

例えば、

102(上から12番目)は
 (1列目 0グループ 2行目)を示している。

*各番号の説明は以下の通り

1列目 = 列番号

0列目	1列目	2列目
000	100	200
001	101	201
002	102	202
010	110	210
011	111	211
012	112	212
020	120	220
021	121	221
022	122	222

2桁目 = 行グループ番号

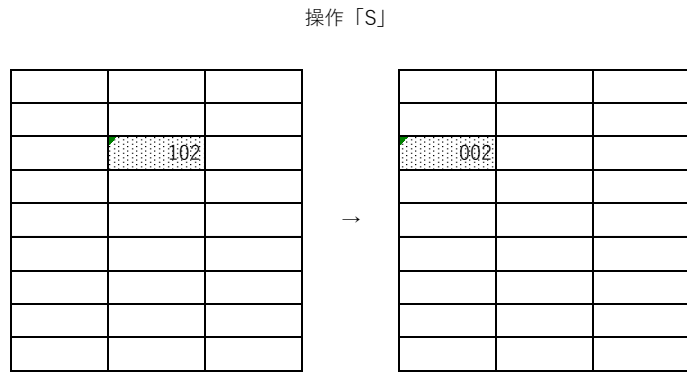
000	100	200
001	101	201
002	102	202
010	110	210
011	111	211
012	112	212
020	120	220
021	121	221
022	122	222

3桁目 = 行番号

0	000	100	200
1	001	101	201
2	002	102	202
0	010	110	210
1	011	111	211
2	012	112	212
0	020	120	220
1	021	121	221
2	022	122	222

5.操作「S」

操作「S」は「列の入れ替え」であるから、「1桁目の書き換え」と同じである。

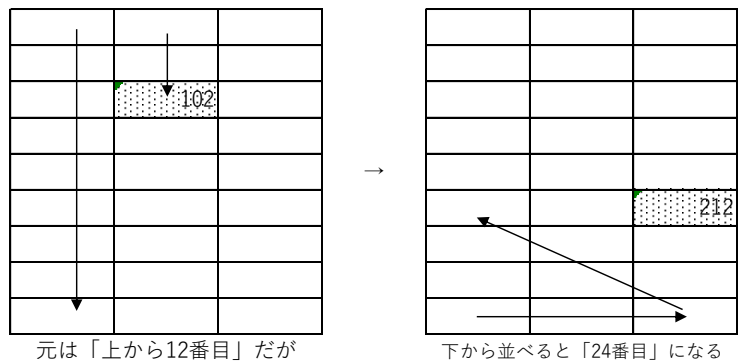


1桁目が「1→0」に変換される
操作「S」

6. 操作「T」

操作「S」に比べて複雑なので、まず動きを確認する。操作「T」はカードを横3列に並べて3つの山を作る操作である。

例えば、「102」を例とすると、右図のようにカードが移動する。



元は「上から12番目」だが

下から並べると「24番目」になる

「102」は「1列目 0グループ 2行目」だが、

- 1列目のカードは「1グループ」に
- 0グループのカードは「2行目」に
- 2行目のカードは「2列目」に 移動するので、「212」の位置に移動している。

操作「T」

000	100	200
001	101	201
002	102	202
010	110	210
011	111	211
012	112	212
020	120	220
021	121	221
022	122	222

→

220	221	222
210	211	212
200	201	202
120	121	122
110	111	112
100	101	102
020	021	022
010	011	012
000	001	002

すべての移動を表記した前頁の図から、移動先を割り出すアルゴリズムは以下のとおりとなる。

① (a b c) → (c a b) に入れ替える	(1 0 2) → (2 1 0)
② a, b を「0なら2」「2なら0」に変換する	(2 <u>1</u> <u>0</u>) → (2 <u>1</u> <u>2</u>)

マジック開始から終了までの位置変換を並べると…

(a b c) ⇒ (c a b)
→ (c' a b) ⇒ (b c' a)
→ (b' c' a) ⇒ (a b' c') → (a' b' c')

*表記… 「⇒」 = 操作「T」 / 「→」 = 操作「S」 / a' = (操作「S」により) 変換された a となり、各桁の値が移動先の値に変化していることが分かる。

7. 謎解き

ここまでの原理を利用して

「2. 手順」の「(4)位置の求め方」を説明する。

	(例)「指定場所」 = 18 の場合
① 指定された場所 (上から○番目) から 1 を引く	18-1 = 17
② ①の数を 3 進数に変換する	17(10) = 122(3)
③ 2 桁目を「0なら2」「2なら0」に書き換える	122 → 102
④ 各桁の数を 10 進数と見なし、各桁の数に 1 を足す	102 → 213
⑤ 桁の順序を逆順にする	213 → 312
⑥ 「1 = 上 2 = 中 3 = 下」と見なし、 左の桁から順に位置を読み取る	312 → 下上中

①…位置情報を 3 桁の自然数で表すため。

③…2 桁目の「0⇔2」変換だけを追ってみる。

初期の 2 桁目を「1」とし、操作 S で書き換えたい数を「0」とする。

$$\begin{aligned}
 (? \ 1 \ ?) &\Rightarrow (\underline{?} \ ? \ 1) \\
 &\rightarrow (? \ ? \ 1) \Rightarrow (\underline{1} \ ? \ ?) \\
 &\rightarrow (0 \ ? \ ?) \Rightarrow (\underline{?} \ 2 \ ?) \rightarrow (? \ 2 \ ?)
 \end{aligned}$$

2 桁目を「1」から「0」に書き換えるのが目的だったが、「2」になってしまった。

これは 2 桁目が書き換え直後に、操作「T」で「0⇔2」変換されてしまうからである。

よって、2 桁目は「0⇔2」変換で、目的の数値に戻す必要がある。

(同様に変換を追うと、1・3 桁目については変換不要であることが分かる)

④…上=上から 1 山目、中=上から 2 山目 のように対応を分かりやすくするための工夫。

慣れてきたら「0=上 1=中 2=下」と考えれば、この手順は不要。

⑤…書き換えの順が、元の位置の 3 桁目 (c') → 2 桁目 (b') → 1 桁目 (a') の順に行われるため。

(下図参照)

(a b c) ⇒ (c a b)
→ (c' a b) ⇒ (b c' a)
→ (b' c' a) ⇒ (a b' c') → (a' b' c')

8. 課題研究に向けて

このマジックを詳細に説明すると、これだけの情報量が必要になる。
 高度な論理を用いているわけではない、

現実的問題を数学的問題に変換する力…「位置の移動」＝「3進数の書き換え」
 数学的問題を解決する能力 …数値の変化をアルゴリズム化する

課題研究としては、数学研究部には向いているが、授業用にはレベルが高い場合があり、マジックの面白さだけが伝わる展開になりかねない。

そこで、このマジックをもう少し初等化した「2進数」バージョンを考案してみた。

(2進数バージョン)

カードは8枚。山を分ける際には2山に分ける。

- 各桁の数と位置番号の対応は同じ。

(1桁目 2桁目 3桁目) = (列番号 行グループ番号 行番号)

- 操作「T」の対応は以下のとおり

操作「T」

000	100	→	110	111
001	101		100	101
010	110		010	011
011	111		000	001

よって、

- ① (a b c) → (c a b) に入れ替える (1 1 0) → (0 1 1)
 ② a, b を「0なら1」「1なら0」に変換する (0 1 1) → (0 0 0)

扱う数が2種になっただけで、手順もほぼ同じ。

- | | |
|--|-----------------|
| | (例)「指定場所」=7 の場合 |
| ① 指定された場所(上から○番目)から1を引く | 7-1=6 |
| ② ①の数を2進数に変換する | 6(10)=110(3) |
| ③ 2桁目を「 <u>0</u> なら <u>1</u> 」「 <u>1</u> なら <u>0</u> 」に書き換える | 110 → 100 |
| ④ 各桁の数を10進数と見なし、各桁の数に1を足す | 100 → 211 |
| ⑤ 桁の順序を逆順にする | 211 → 112 |
| ⑥ 「 <u>1</u> =上 <u>2</u> =下」と見なし、
左の桁から順に位置を読み取る | 112 → 上上下下 |

(下線部が3進数バージョンからの変更点)
 これなら解析しやすい…かな?

9. 最後に

このマジックを解析するには、多くの生徒が

①具体的な例を挙げ ②移動のようすを追って ③すべてのパターンを確認しようとするが、27通りのパターン解析は辛いので…

①位置情報を数値化し ②数値の変化する規則を見つけ ③一般化することで全てのパターンを証明を試みるのではないだろうか。

また、「2進数バージョン」から提供すれば、「3進数バージョン」を考案する生徒もいるかもしれない。

この過程はまさに PISA で提唱された「数学化サイクル」に準じている。

生徒にこのような感動体験をたくさん味わってもらい、数学への偏見を払拭したいと考える日々である。

10. 注釈

*1 「合同文化祭」…旭川市の高校・大学の文化系団体が展示やショーを行うイベント。

*2 「ジェルゴン」…発案者の名前と思われるが、詳細不明（すみません）。

*3 「完全マジック」…すり替え等、手先の技術が無くてもマニュアル通りやれば誰でも成功するマジック。

11. 参考文献

「数学マジック事典」（上野富美夫著／東京堂出版）

「数学マジックを用いた授業実践について：選択教科における実践の検討として」

（砂井博光著／教職研究 28 巻 p93-99）

（2018年6月2日 第105回 数学教育実践研究会にて発表）