

0. はじめに

北数教代数解析研究部よりご案内を頂き、2018年3月、「数学コンテスト」の表彰式に参加した。参加した高校生達が出題者からの解説を聞き、それに対して別解を述べるという場面があり、会場は数学に対する熱い想いが溢れていて、大変面白かった。

その際、来賓の清史弘先生（(有) 数学研究所 代表取締役）に先生自身が高校時代に興味を持った問題を紹介していただいた。その課題に取り組んでみる。

1. 問題

1024ⁿ（nは自然数）の最高位の数が「2」であるとする。
そのときのnの最小値を求めよ。

（例）（清先生の表現）

1024をほぼ1000と見なすと、1024ⁿはnが小さいうちは、最高位の数が1である。

$$1024^2=1048576$$

$$1024^3=1073741824$$

...

nを大きくしていくと

$$1024^{20}=16069\dots$$

$$1024^{21}=16455\dots$$

...

$$1024^? = 2\dots$$

この、最初に最高位が「2」になるnはいくつか？

2. 解法

1024ⁿの桁数をm+1（mは自然数）とすると

最高位の数が「2」となるとき

$$2000\dots \leq 1024^n \text{ が成り立つので、}$$

$$2 \times 10^m \leq 1024^n$$

ここで、nが求める最小値より小さい（すなわち1024ⁿ=1xxx...）のとき

$$1024^2 \text{ は } 7 \text{ 桁}$$

$$1024^3 \text{ は } 10 \text{ 桁}$$

$$1024^4 \text{ は } 13 \text{ 桁} \quad \dots \quad 1024^n \text{ は } 3n+1 \text{ 桁} \quad (\text{最高位が2にならない程度なら}) \text{ であるので、} m=3n.$$

よって

$$2 \times 10^{3n} \leq 1024^n$$

$$\log_{10}(2 \times 10^{3n}) \leq \log_{10}1024^n$$

$$\log_{10}2 + 3n \leq 10n\log_{10}2$$

$$(10\log_{10}2 - 3)n \geq \log_{10}2$$

$$n \geq \frac{\log_{10}2}{(10\log_{10}2-3)} \text{ を得る。}$$

ここで、 $\log_{10}2 = 0.3010$ とすると、

$$n \geq \frac{0.3010}{10 \times 0.3010 - 3} = \frac{0.3010}{0.010} = \frac{3010}{100} = \frac{301}{10} = 30 \frac{1}{10}$$

したがって、最小値は $n=31$ 。

3. だがしかし

$$1024^{31} = 2085 \dots \quad 1024^{30} = 2037 \dots \quad 1024^{29} = 1989 \dots$$

正解は $n=30$ 。

4. なぜ

$\log_{10}2 = 0.3010$ は近似値なので

$$0.30095 \leq \log_{10}2 < 0.30105$$

小数第5位以下の数値により、誤差が生じた可能性がある。

そこで、小数第5位までの確定数値 $\log_{10}2 = 0.30102$ を代入すると

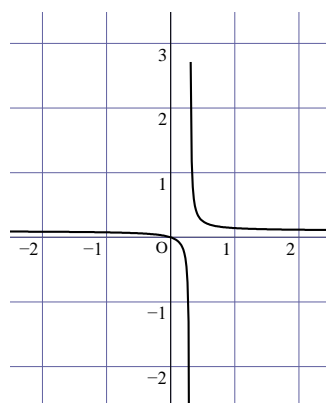
$$n \geq \frac{0.30102}{10 \times 0.30102 - 3} = \frac{0.30102}{0.0102} = \frac{30102}{1020} = 29 \frac{87}{170} \quad \text{となり、} n=30 \text{ を得る。}$$

5. 誤差の影響

$\log_{10}2 = x$ とすると、 $n \geq \frac{x}{10x-3}$ 。

$$y = \frac{x}{10x-3} = \frac{1}{10} \left(1 + \frac{\frac{3}{10}}{x - \frac{3}{10}} \right) \quad \text{とすると、}$$

グラフは右図のようになる。



漸近線が、 $x = y = \frac{3}{10}$ なので、

第4桁を近似するときの範囲

$0.30095 \sim 0.30105$ は漸近線のすぐ近くとなり、誤差が n の値に大きく影響する。

6. どう解くか

曖昧に解いていくなれば、ある程度の近似で n の最小値を求め、それに近い値を試しに代入して確認すればよい。もし、より精度の高い近似を利用するのであれば、次のような方法もある。

<ネイピア・ブリッグスの方法>

$x = \log_{10}2$ とすると

$$10^x = 2$$

$$10^{\frac{x}{m}} = 2^{\frac{1}{m}}$$

$$\left(10^{\frac{1}{m}}\right)^x = 2^{\frac{1}{m}}$$

$10^{\frac{1}{m}} = 1 + a$, $2^{\frac{1}{m}} = 1 + b$ とすると、

$$(1 + a)^x = 1 + b$$

$$a \doteq 0 \Rightarrow 1 + b \doteq 1 + ax \quad (\because 2 \text{項定理})$$

$$x \doteq \frac{b}{a}$$

すなわち、 $10^{\frac{1}{m}}$, $2^{\frac{1}{m}}$ をもとに、近似値を求めることができる。

ネイピア・ブリッグスは開平を利用し、2と10の累乗根を求めることで、近似値を求めた。

7. ネイピアのつもりになって

この問題を「自力で解いた」とするためには、(岡崎としては) ネイピアのつもりで開平算に挑まなくてはならなかった。しかし、開平算の経験はあるものの、すでに忘却の彼方である。

復習のつもりで、2の4乗根に挑戦してみる。

①まず2乗根

	1. 4 1 4 2 1 3...
1	2. 0000000000000000
1	1
24	1 00
4	96
281	400
1	281
2824	11900
4	11296
28282	60400
2	56564
282841	383600
1	282841
2828423	10075900
3	8485269
2828426	1590631...

②次に4乗根

	1. 1 8 9...
1	1. 414213
1	1
21	41
1	21
228	2042
8	1824
2369	21813
9	21321
2378	492..

「計算してみて分かったこと」

より高い精度の近似を行うためには、累乗根の指数が大きいうちに、精度の高い近似を行う必要がある。

次に、10の4乗根についても求めてみる(計算は同様)。

(3分クッキング風に) 1.778...

これらの値から

$$\log_{10} 2 = \frac{0.189}{0.778} = 0.2429 \dots \leftarrow \text{全然使えない}\dots$$

8. 感想

近似値を使用する際には誤差を考慮しなければならない。教科書に「 2^{30} は何桁の数か。」という問題が掲載されているが、より巨大な数の桁数だと誤差が生じる可能性がある。これまで「この方法で解けば大丈夫。」と当然のように対数を扱っていたが、そのことを反省する良いきっかけになった。

またネイピアが一生をかけて対数表を作り上げたことは知っていたが、実際にその計算に触れてみると、その苦勞や偉大さを体感することができた。コンピュータが無かった時代に対数が活用されていたということは、まさに対数がコンピュータ代わりだったということだ。そのために根気強く計算を続けたネイピアやブルックスに感謝したい。

そして、高校時代に問題集にも載っていないこの課題を考えた清先生も素晴らしい。私もその姿勢を見習って未知の課題に取り組んでいきたいと思う。

(2019年8月31日 第110回数学教育実践研究会にて発表)