

言葉で語る「変量変換」

旭川南高校
岡崎知之

0. はじめに

今年度3年次を主に担当し、日々センター対策を行っている。その中で先日、数ⅠAコースの生徒に「お悩みアンケート」を行って、苦手分野の調査をしてみたところ「変量変換」と答えた生徒が多かった。

ちなみに「変量変換」とは「データの分析」における次のような問題である。

(例)

テストの得点を変量 x とし、 x の平均値を \bar{x} 、標準偏差を s_x とする。テストの得点を以下の計算式により新しい得点 x' に換算したとき、新しい得点の平均値 \bar{x}' 、標準偏差 $s_{x'}$ を求めよ。

$$x' = 10 \times \frac{x - \bar{x}}{s_x} + 50$$

今回のレポートは、私がお悩みに答えるべく、試行錯誤した記録です。

1. 教科書における「変量変換」の説明

(1)元々「変量変換」は、数ⅡB「確率分布と統計処理」において必修項目となっている。

☆確率変数 $aX + b$ の平均・分散・標準偏差

a, b を定数とするとき、

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad V(aX + b) = a^2V(X) \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

その説明は「 Σ 」を用いて厳密に行われているが、対象クラスの生徒が「数ⅡBを履修していない者がいる」「履修したが『 Σ 』に拒否反応を持っている」ことから、「 Σ 」を用いた説明は失敗(1回目)に終わった。

一応「 Σ 」の部分で、数ⅠA風に「 $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ 」として説明したが、「分散」の時点で理解できなくなり失敗に終わる(2回目)。

(2)数ⅠAは必修項目となっていないが、一部の教科書にコラムとして掲載されている。

データの値すべてに同じ数を足したり、すべてに同じ数を掛けたとき、平均値、分散、標準偏差がどのように変化するか考えてみよう。

データの各値すべてに b を足すと、データの各値も平均値も b だけ増加するから、データの各値から平均値を引いた差、すなわち偏差は変わらない。したがって、分散と標準偏差は変わらない。

また、データの各値すべてに a を掛けると、データの各値も平均値も a 倍になるから、データの各値の偏差も a 倍になる。したがって、分散は a^2 倍になり、標準偏差は $|a|$ 倍になる。(数研出版「高等学校数学Ⅰ」)

この説明は極力数式を省き言葉だけで結論を導いており、対象クラスの生徒にとって最も理解しやすい形式に思われた。ところが、確かに説明に反論する生徒はいないが、数値が見えない説明のため、定着率が悪かった(3回目)。

2. 生徒に最適化した説明

以上の試行錯誤から、生徒の数学力に合わせた理解しやすい説明は、「言葉による説明」+「小データの計算例」であることが分かった。後日、その説明をプリントにまとめたところ、(今のところは)理解できる者が増えたので、もし同様の悩みを抱えている先生がいれば、使ってください。

(2019年11月30日 数学教育実践研究会にて発表)

*添付資料 (1)「変量変換」のツボ (2)数学研究Ⅱ アンケート集計

(資料1)

☆ (データの分析) 変数変換のツボ

①全データに同じ値を加える

②全データに同じ値をかける と統計量 (平均など) はどのように変化するだろう。

(実験)

Aくん、Bくんの数学のテストの得点がそれぞれ
10点、30点だったとする。

<平均と偏差について>

①得点に30点を加えると、平均・偏差はどう変わるか？

	10点	30点	→	40点	60点	
(偏差)	-10	+10		-10	+10	←変化しない
(平均)	20点			50点		←30点増える

*全員同じだけ点数が上がるから、**点差は広がらない。**

②得点を2倍すると、平均・偏差はどう変わるか？

	10点	30点	→	20点	60点	
(偏差)	-10	+10		-20	+20	←2倍になる
(平均)	20点			40点		←2倍になる

*得点が高い人ほど点数が上がるから、**得点の差が広がる。**

☆変数変換時の「平均」と「偏差」の法則

全データに

「+a」すると、 (平均) = (元の平均) + a (偏差) は変わらない

「×a」すると、 (平均) = (元の平均) × a (偏差) = (元の偏差) × a

<分散と標準偏差について>

まず、定義を確認しよう。

(分散) = (偏差)²の平均

(標準偏差) = √(分散)

←もともと、「得点と平均点との差」を調べる数値なのだ！

①得点に30点を加えると

点差が広がらないから、「偏差」は変化しない。よって、「分散」「標準偏差」も変化しない。

②得点を2倍すると

・「偏差」が2倍になるから、(偏差)²は2²倍になる。

→その平均も2²倍になる = 「分散」が2²倍になる。

・「分散」が2²倍になる → 「標準偏差」は√2² = 2倍になる。

☆変数変換時の「分散」と「標準偏差」の法則

全データに

「+a」すると、

(分散) = (元の分散) + a (標準偏差) = (元の標準偏差)

「×a」すると、

(分散) = (元の分散) × a² (標準偏差) = (元の標準偏差) × a

<共分散と相関係数について>

まず、定義を確認しよう。

$$(\text{共分散}) = (x \text{ の偏差}) \times (y \text{ の偏差}) \text{ の平均}$$

$$(\text{相関係数}) = \frac{(\text{共分散})}{(x \text{ の標準偏差})(y \text{ の標準偏差})}$$

①得点に30点を加えると

「偏差」も「標準偏差」も変化しない。よって、「共分散」「相関係数」も変化しない。

②得点を2倍すると

- 「偏差」がそれぞれ2倍になるから、 $(x \text{ の偏差}) \times (y \text{ の偏差})$ は 2^2 倍になる。
→その平均も 2^2 倍になる＝「共分散」が 2^2 倍になる。
- 「偏差」がそれぞれ2倍になるから、 x, y の「標準偏差」はそれぞれ2倍になる。
→ $(x \text{ の標準偏差}) \times (y \text{ の標準偏差})$ が $2 \times 2 = 2^2$ 倍になる。
→「相関係数」の分母も分子も 2^2 倍になるから、「相関係数」は変化しない。

☆変数変換時の「共分散」と「相関係数」の法則

全データに

「+a」すると、

$$(\text{共分散}) = (\text{元の共分散}) \quad (\text{相関係数}) = (\text{元の相関係数})$$

「×a」すると、

$$(\text{共分散}) = (\text{元の共分散}) \times a^2 \quad (\text{相関係数}) = (\text{元の相関係数})$$

この法則の興味深い点は、性質が「データの値によらない」ことである。

すなわちどんな問題でも、この法則を利用できる。

(例)

生徒100人の数学の得点を、それぞれxとする。

$$x' = 3x + 10 \text{ として得点を修正したとき、}$$

xの平均、分散、標準偏差を \bar{x}, s_x^2, s_x

x'の平均、分散、標準偏差を $\bar{x}', s_x'^2, s_x'$ とすると

$$x = \square x', \quad s_x'^2 = \square s_x^2, \quad s_x' = \square s_x \text{ と表せる。}$$

(解法)

得点を10点足しても、分散や標準偏差は変化しないが、

3倍すると変化するので、

$$(\text{平均は3倍}) \quad x = 3x'$$

$$(\text{分散は3}^2\text{倍}) \quad s_x'^2 = 3^2 s_x^2$$

$$(\text{標準偏差は}\sqrt{3^2}\text{倍}) \quad s_x' = 3s_x$$

100人の得点が分からなくても、変化は分かります。

(資料2)

数学研究Ⅱ 【数ⅠA 岡崎コース】 アンケート集計

< (苦手な) ジャンル >

単元名	票	単元名	票
数と式	4	集合と命題	3
2次関数	5	確率	7
三角比	1	整数	5
データの分析	3	図形の性質	3

(コメント)

高校数学の公式や法則は、長い間数学者が作り上げてきたものばかりで、なかなかその場でひらめくものではありません。まずは1つずつ、使い方に慣れましょう。

練習すれば、必ず誰でもできるようになる、公式や計算技術を挙げます。

「三角比に関する公式」(全部書けないとダメです。) 「2次方程式・不等式」

「平方完成」(数字でも文字でもどんな形でも。) 「反復試行の確率」

「統計量(相関係数など)」 「不定方程式」

これらは習得すれば、「出題してくれて、ラッキー!」と感じられるようになります。

まだその気持ちを感じられない人は、無理せず、教科書の基本問題のみを掲載している問題集を繰り返しましょう。それだけでも、40%程度は取れます。

< (習得できていない) テクニック >

- ・不定方程式
- ・余角定理
- ・3心(内心・外心・重心)
- ・円順列
- ・方べき
- ・平行移動
- ・最大最小値
- ・条件付き確率

(コメント)

こんなマニアックな用語を挙げられただけでも、あなたは偉い!

定義を理解しているだけではなく、意味も分かっていないと使えないテクニックが多いですね。

別紙で説明します。

< 発展系 >

- ・二次関数(3)に出てくる問題
- ・データの変量変換(○倍する…等)
- ・三角比で図形の性質を利用する問題

(コメント)

この課題がクリアできれば、センター8割以上が見えてきます。

多くの応用問題に挑戦し、「この問題、あの問題に似てる!」と気付けるようにするのがセオリーですが、変量変換のように、少しのコツで解決できる問題もあります。

その部分については、アドバイスします。

<お悩み>

- ○○大学の過去問が全然解けない！

…今から2次対策を始めている心掛けがすばらしい。

赤本が無い大学は、解説が無く大変ですね。1年分の解説をとりあえずプレゼントします。

- 確率で、最初のほうの問題で間違え、いもづる式に不正解が続いてしまう。

…これは確率に取り組む人の永遠の課題です。

解決策としては、『すべての確率の和=1』を確かめる」という方法がありますが、センターでは不可能ですよね。ミスが多い人は「発展問題に悩む時間を減らして、確かめに使う。」ぐらいかな…

- 看護学校の場合、どのテキストが効果的なのか？

…看護学校の特徴として、

「単問形式の問題が多い」「発想力よりも、正しく公式を使える力が問われる」傾向があります。

これはセンターと真逆です。

実際に問題を解いてみて、「公式を使うだけ問題」の正答率を確認しましょう。そこで得点率が悪ければ、センター対策テキストよりも、学校で使っている問題レベル（サクシードのA問題でもよし。）で基礎力を上げるのが優先だと思います。

- 解答時間が足りない。スピードアップのコツとは。

…センターでは記述内容が問われないので、自分が解答を誤らない程度の記述で大丈夫です。

特に、「sin を s と書いて省略」「ベクトルの→を略記」はよく使います。

あと、私がよく使っている「3余り=3̄」も大幅に時間短縮できるので、使ってください。無料です。

- 模試本番になるとできなくなってしまふ。

…いつも通りに受けてうまくいかない状態が続いているのであれば、いつもと違う解き順にするのも1つの方法です。得意な単元から解くとか、一度全問を軽く読み、その回で一番解けそうな所から解答するなど、極端ですが、一度模試を捨てるつもりで解いてみてはいかがでしょうか。

(最後に)

いつもいつも、皆さんの演習中の集中力には感心しています。

努力が実結び付くためにも、微力ながらお手伝いしますので、遠慮なく相談してください。