

教員しながら大学院で研究してみた –NJ 定数に関する未解決問題–

旭川北高校 岡崎知之

0. はじめに

私は2020.4.1~2023.3.1の間、北海道教育大学旭川校大学院の教科教育専攻数学教育専修に大学院生として所属し、修士論文が認められ卒業に至った。教員の大学院進学には研究に没頭するため休職するケースがあるが、私は個人的興味から進学を決意したので、極力現場に迷惑をかけないよう勤務しながら通学することにした。

大学院に所属した3年間は担任業務や異動があったりと激務ではあったが、努力に見合うだけの成果は得られたと感じている。このレポートでは大学院生活を振り返り、大学院進学に興味を持たれている先生方の参考にしていただきたい。

1. 「きっかけ」から「合格」まで

私は弘前大学理学部数学科の出身であるが、大学院には進学していない。理由は2つあり、1つは寮生活にハマってしまい、留年したことである。もう1つは、数学は紙とペンさえあれば研究はできるから、個人でも研究ができるだろうと考えたからである。しかしながら、生業としている教員という仕事の中で専門的な数学を扱うことは少なく、私生活で個人研究は行っていたものの、数学界に貢献できるようなレポートは書けていなかった。

年齢を重ね、父が亡くなり、「死」という重さを感じるようになったとき、「これで人生は終われない。せめて新しい発見をしなければ。」という気持ちが浮かび上がってくるものの、行動にはなかなか移れなかった。

そんなある日、印刷室で北教大大学院の入学案内のチラシを見つけた。私は教育大を、教員のスキルを上げたり教育学の研究を行う施設で、数学の専門研究は行わないと決めつけていたのだが、チラシをよく読んでみると、そうではないらしいことに気づいた。しかも、大学院は次年度から廃止され、教職大学院になるらしい。今年がラストチャンス。受験までほとんど猶予がなかったが、締め切り日ギリギリで申し込んだ。

受験形式は現職教員なので、面接のみだった。日常研究会で様々な先生方と面識があるので、面接官の先生も大半が1度お会いしたことのある先生であった。しかし、面接官には大変心配された。なぜなら、教員を続けながら大学院に入学して専門的な数学研究を行う人は、数年に1度現れるくらい稀らしい。面接官は、研究にはかなりの決意が必要だとか、2年では終われないかもしれないとか、厳しい現実を伝えてくださったが、決意は変わらず、「ぜひお願いします。」と言い切り、合格に至った。



2. 1年目のミッション 「課題研究」以外の単位をすべて取る！

卒業に必要な単位は30単位。半期週1コマの講義は2単位、修論作成が目標の「課題研究」は4単位となるので、概算で年間13種類の講義を受けることになる。院生担当の教官から、「研究に集中するため『課題研究』以外の単位は1年次に修得すること」と伝えられた。私の場合、週に6コマの講義を受けることになるが、勤務校から教育大までの移動に往復1時間かかるため、各講義の先生と相談して夕方から夜にかけて授業を受けることになった。

それでもその時間を作るのは困難だったが、幸いにも コロナウィルス感染拡大を受け講義は殆どオンラインとなり、自宅で受けることができた。約30年ぶりの大学の講義はついていくのが大変で、本棚に置きっぱなしだった専門書をもう一度読み漁ることになったが、良いきっかけだったと思う。受講者が少ない(1~6名)ので、先生には存分に質問し、先生も丁寧に説明してくれた。担当された先生にはアラフィフの生徒は扱いづらかったと思うが、本当に感謝している。



3. 2年目のミッション 担任しながら研究をする！

入学時に大学時代の専門分野を確認され、解析ゼミに所属することになった。小室直人先生という60歳過ぎのベテラン先生が指導教官となり、「関数解析」に関する修論作成を目標に、1年次後半から2年次前半まではテキストの輪読を行った。

2年目は数学研究以外の講義はなく、研究テーマを探ったり、研究の方向性を模索する日々だったが、何でも安請け合いする癖のおかげで、高校2年生の担任を務めることになり、教員モードと数学モードの切り替えがとても難しかった。特にコロナウィルスの影響で3月に延期された見学旅行では、異動の準備と重なり、スケジュールが詰まって研究が疎かになってしまった。

ところで、研究の工程を端的にまとめると、①場合分けを行い、NJ定数の式を立てる。②各場合の大小関係を比較し、最大値を突き止める。ということの繰り返しである。時には高次かつ多変数の式の大小比較でなかなか結論に至らない場合もあり、不安に苛まれつつ、学校業務を進めるといふ日々を過ごしたこともあった。

4. 3年目のミッション 異動先の環境に慣れつつ修論を仕上げる！

2年次前半の研究段階で研究期間が不足すると判断し、履修延長を申請した。しかし、修論用の研究データが積み重なってくると判断材料が複雑に絡まり、論理をまとめるのに予想外に時間がかかった。

しかも、長年勤務は避けたいという心理から、9年在籍した旭川南高校から旭川北高校に異動した。仕

事の手順を再構成したり、体育会系部活動を指導するなどの業務負担は大きく、ゲームのRPGのように少し研究から離れると、どこまで進んだか思い出すのに時間を要するという状況が度々起こった。

また表現の厳密性が、高校数学と比較にならないほど高く、式の再確認・文法の整理・タイプミスの修正・参考論文の番号など、論文にまとめる作業だけでも約半年かかった。

そんな中、サイエンスボランティア旭川の「学生の科学展」のプロデューサーを務め、「感じる数学展」の旭川招致の手配をし、北教大旭川校の出展もお手伝いした。人生でベスト3に入るくらい、精神崩壊ギリギリの多忙な期間であった。(ごめんなさい。すべて自分が悪いのです…)

そんな困難を乗り越え、2月に修論が完成し、発表を行った。すでに査読が終わっていることと、専門分野外の先生もおられることから、質問は少ないと予想していたが、予想に反して質問の嵐が吹き荒れた。冷や汗をかいた場面もあったが、教育大の先生方の研究熱心な姿勢に感服した。

論文発表後は、別室で口頭試問が行われた。論文の内容についての質問の他にも、私が教員であることもあって、現在の高校数学に関する話題も上がり、長時間の口頭試問となった。

3月15日、学位授与式が行われ、3年間の短い大学院生活が幕を閉じた。当日は、保護者として大学生の娘に参加してもらったが、受付が混乱してしまい、ご迷惑をかけてしまった。

卒業はできたが、論文はまだ未完成である。積み残した課題が多く、今後も納得がいくまで、続きを書きたいと決意している。

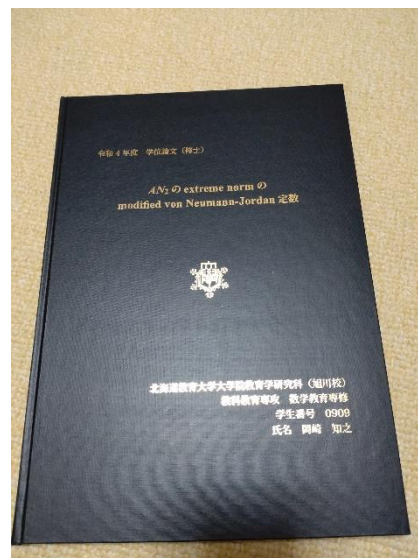
(今後も一生「数楽」します!)



5. 研究成果

「関数解析学」では、様々な関数空間上で積分や微分によって定義される「線型作用素」の振る舞いを通じ、積分方程式や微分方程式を線型代数的に取り扱う。代表的な関数空間「Banach 空間」をその性質で分類する手法として幾何学的定数が様々考案され近年活発に研究されている。その1つである

「von Neumann-Jordan 定数 (略称 NJ 定数)」は、定義されたノルムに対し Banach 空間の性質がどれだけ Hilbert 空間に近いのかを示す指標となっており、比較的構造が簡単なノルムではその値が判明しているが、すべてのノルムに対する NJ 定数は明らかでない。そこで、ノルムを「端点ノルム」、NJ 定数をさらに条件を強めた「modified NJ 定数」として、値を調べてみた。結果として、特定の「modified NJ 定数」を求めることに成功し、その値を利用して「NJ 定数」との比較を行い、いくつかの法則を得た。



*NJ 定数とは？

<定義>

Banach 空間 $X = (X, \|\cdot\|)$ に対し

$C_{NJ}(X, \|\cdot\|) = \sup \left\{ \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} : \|x\| + \|y\| \neq 0 \right\}$ を X の von Neumann-Jordan 定数といい、

(X の単位球面を $S_X := \{x \mid \|x\| = 1\}$ とするとき)

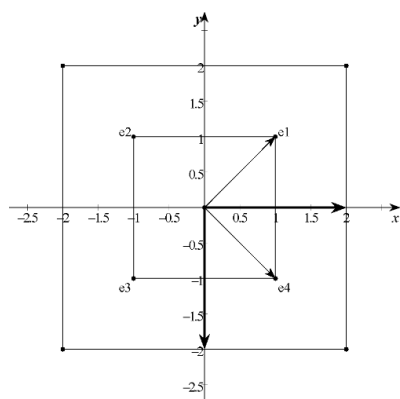
$C'_{NJ}(X, \|\cdot\|) = \sup \left\{ \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{4} : x, y \in S_X \right\}$ を X の modified von Neumann-Jordan 定数という。

<主な性質>

- (i) $1 \leq C'_{NJ}(X, \|\cdot\|) \leq C_{NJ}(X, \|\cdot\|) \leq 2$
- (ii) 「 X が Hilbert 空間」 $\Leftrightarrow C_{NJ}(X, \|\cdot\|) = 1$
- (iii) 「 X が Hilbert 空間」 $\Leftrightarrow C'_{NJ}(X, \|\cdot\|) = 1$

*ここで研究作業を体験していただくため、問題を用意しました。

Q. $\vec{x} = \vec{e}_1$, $\vec{y} = \vec{e}_2$ とします。 $P(e_1, e_2)$ の値を求めてください。



<計算式>

$$P(e_1, e_2) = \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}$$

ノルムの計算方法

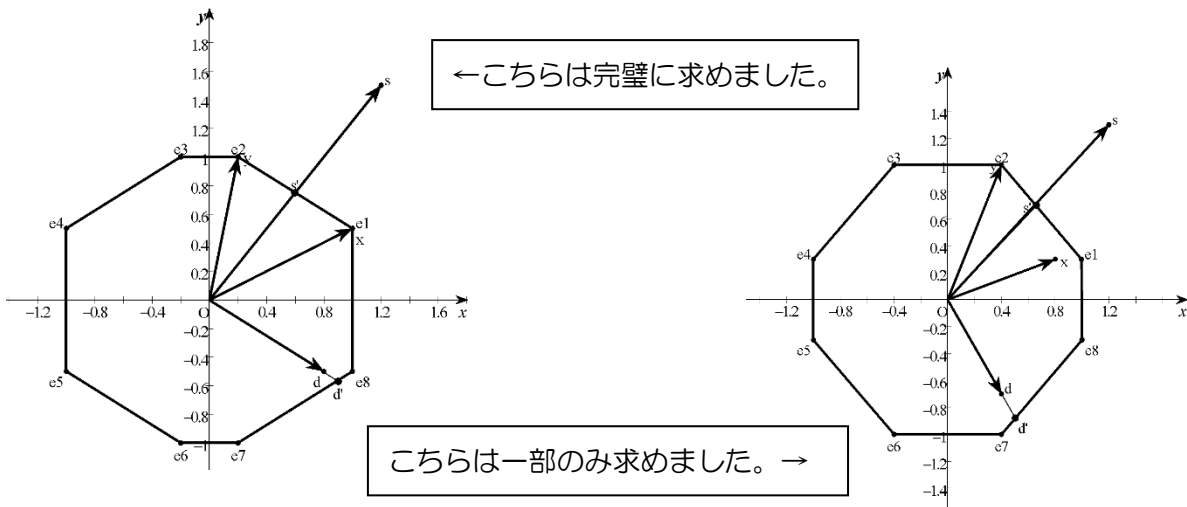
…平面内に2つの正方形がありますね。

- ベクトルの終点が内部の正方形（1辺の長さ2）の周上であれば、ノルムは1
- ベクトルの終点が内部の正方形（1辺の長さ4）の周上であれば、ノルムは2 です。

(等高線のイメージです。)

この平面上の任意の2点を \vec{x} , \vec{y} としたとき、 $P(x, y)$ の値が1つ決まります。その最大値が NJ 定数です。

ちなみに私が求めたのは、次のような空間です。



1年半かけて、次の結論を得ました。(左の図の場合の modified NJ 定数の値)

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq p \leq q \leq 1 \text{ のとき} \\
 & C'_{NJ}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q}) = \max \left\{ 1 + q^2, 1 + \left\{ \frac{(1-p)(1-q)}{1-pq} \right\}^2 \right\} \\
 & = \begin{cases} 1 + q^2 & (p(1 - q^2) + (2q - 1) - pq \geq 0) \\ 1 + \left\{ \frac{(1-p)(1-q)}{1-pq} \right\}^2 & (p(1 - q^2) + (2q - 1) - pq \leq 0) \end{cases}
 \end{aligned}$$

6. 大学生生活で得たもの

1 点目は「数学には未解決の問題が多数ある」ということである。本研究の modified NJ 定数もその 1 つであり、一見平面幾何の簡潔な問題と捉えてしまうが、実際に挑戦すると計算が複雑でなかなか結論に辿り着かない。また、私が抱えている問題の中にも数学界で未解決の問題があり、問題が未解決かどうかを調べることが研究の第一歩であることを学んだ。

2 点目は「専門分野の情報は、専門分野の世界に属することにより得られる」ということである。私は数学は紙と鉛筆があれば、あとは自分の思考次第で研究ができると思い込んでいたが、数学界は常に変化しており、最新の状況を知るためには論文検索だけでなく、同じ研究を行う研究者との繋がりが必要であることを学んだ。

3 点目は「昔に比べてコンピュータシミュレーションが活用できる」ということである。現在のコンピュータの性能は計算速度・機能・AI の面で格段に進歩している。また、フリーソフトや低価格のアプリでも十分利用できるものが多い。NJ 定数の計算では大小関係の評価計算を何度も行うが、予想が誤っていた場合、膨大な計算がすべて無駄になってしまう可能性がある。本研究では、評価を行う前に「GRAPES」「Wolfram Alpha」「Mathematica」を用いて、3次元グラフによるシミュレーションを行い、予想を立てた。コンピュータが発展していない時代と比べて、現代数学は研究スピードが格段に速くなり、より深い研究が行えていることを学んだ。

また大学生活を通して、数学を愛する多くの人と交流することができた。同じ数学でもそれぞれの専門分野やスタンスによって、独特の個性を感じられた。特に指導教官の小室先生には専門教育だけでなく、一教師としての意識の高さを感じた。47歳にして初の専門分野の研究をさせていただいたが、高校数学に慣れてしまったせいか、厳密な論議や大学数学の知識になかなかついていけなかった。そんなとき、小室先生は「ゆっくりで良いんです。分かるまで考えましょう。」とお声をかけていただいた。この言葉は強く印象に残っており、今後の教員生活で生徒に伝えたい。

7. 課題研究のすすめ

大学院で研究をおこなった経験は「課題研究」の指導に活かせると考えている。現行の学習指導要領では「課題研究」への取り組みが義務付けられているが、高等学校の数学科教員には「課題研究」を苦手とする教員が多く見られる。その原因はいくつか挙げられるが、代表的なのは教員自身が数学をテーマとした課題研究を行った経験がないことが原因ではないだろうか。大学数学科では4年生でセミナーに参加し、テキストの輪読を行うのが一般的である。課題研究の手順である「課題を発見する、解決する、新たな課題を発見する」というサイクルを経験する機会が少ないのかもしれない。

また高校教員は指導の際に、大学数学や数学者たちの話をすることがあるが、教員自らの学生経験や想像で補っている部分が多いのではなかろうか。可能であれば、高校数学の基盤となっている大学数学を論拠をもって指導したいところである。

3年間、大学院生として専門分野のごく一部ではあるが研究を行った経験は、高校教員が抱えるこれらの問題を必ず解決してくれると考えている。また久しぶりに生徒の立場で講義や課題に取り組み、「分からない」気持ちを感じられたのも大きな成果だと思う。

8. 補足

- ・本レポートで扱っている数学用語は、イメージが伝わりやすいよう、論理的厳密性は考慮しておりません。ご了承ください。(付属の「修論概要」はその点を考慮しています。)
- ・本文には書きませんでしたが、数学研究と教育数学では用語や式の扱いに違いがありました。中でも修論を仕上げる際に、『「傾き」というものは数学界に存在しない。』という事実は衝撃的でした。
- ・4ページ目の問題の正解は、「2」でした。よって、問題で扱っている空間は Hilbert 空間です。

