

# 「カエル跳びゲーム」の数理

(副題 「科学探検ひろば」にもっていくネタを数実研にもっていこう！①)



旭川南高等学校

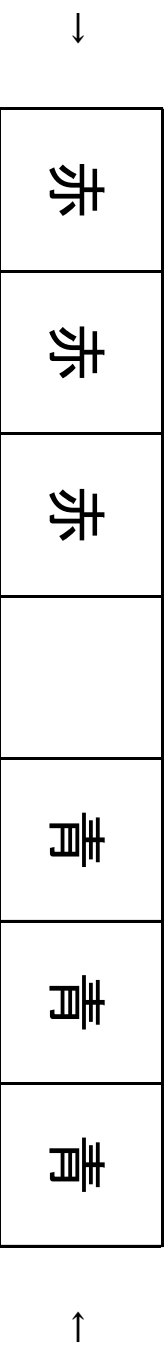
数楽研究部「あるご」顧問

サイエンスボランティア旭川特別学芸員

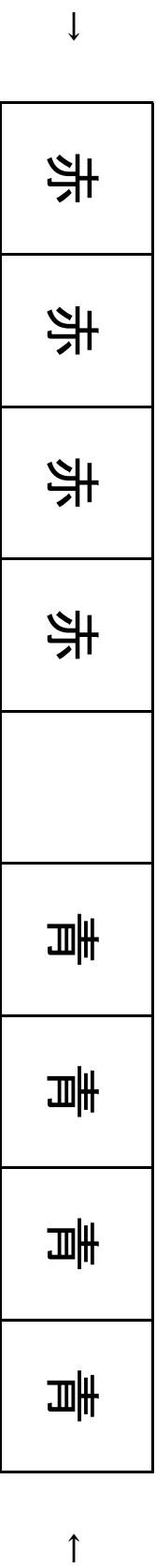
岡崎知之

# カエル跳びゲーム

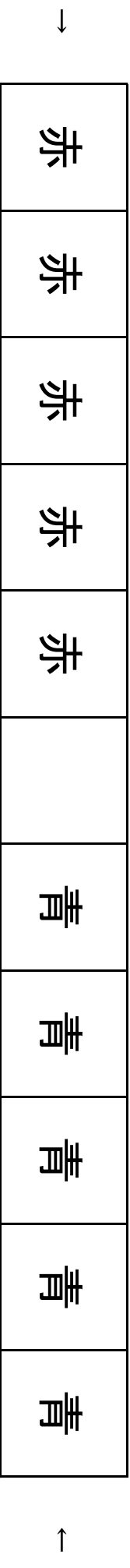
LEVEL 1



LEVEL 2



LEVEL 3



(ここからが本題です！)

## 0. はじめに

現在、私が顧問を務める、旭川南高校数楽研究部「あるご」では、平成27年1月10・11日(土・日)に旭川市科学館で行われるイベント「科学探検ひろば」(参考資料①)に向けて、研究・工作を進めているところです。  
昨年に続き、今年もブースを2つ出す予定です。

1つ目は、「石取りゲーム」です。

レベルを3段階に分け、山の数を 2 → 1 → 3 と設定しています。(参考資料②)

2つ目は、先ほど遊んでいただいた「カエル跳びゲーム」と「Hパズル」(次回説明予定)です。

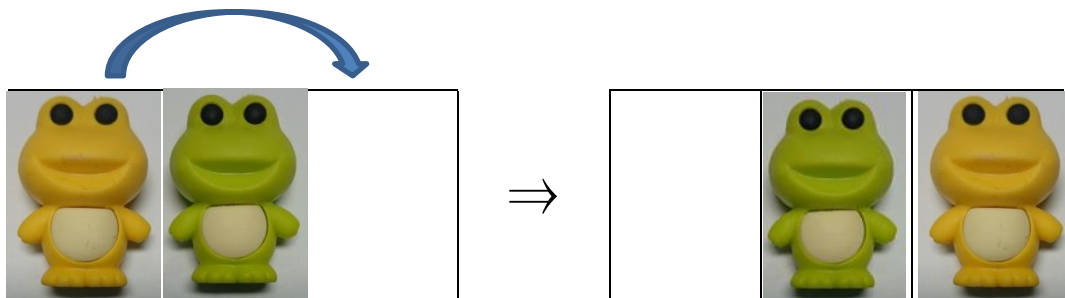
本レポートでは「カエル跳びゲーム」の最小手数を研究した際の実践記録を掲載します。

## 1. 「カエル跳びゲーム」のルール

- ① 1ページ目のシートの「青」の巣(=色が表示されているマス)に赤カエルを、「赤」の巣に青カエルを置きます。(カエルがなければ、コインで代用してください。)
- ② 次の移動ルールにしたがい、すべてのカエルが、自分の巣(同色のマス)に帰ることができたらゲームクリアです。

### ☆ 移動ルール

1. 移動方向は自分の巣の方向のみです。戻ることはできません。
2. 直前にカエルがいたら、一匹だけ飛び越えることができます。  
(二匹以上並んでいる場合は、飛び越えられません。)



## 2. 「カエル跳びゲーム」の最小手数

「あるご」には、数学オリンピックに挑戦するような生徒は現在おりませんので、部活動はいつも実験からです。

ある日の放課後、今年度の「科学探検ひろば」のネタを探していたときでした。少々手詰まり気味の部員たちを見て、顧問からこんな提案をしました。

『「カエル跳びゲーム」という楽しいパズルがあるんだけど、どう？』

黒板でマグネットを使いながら、3名の部員がゲームをクリアし、下の表を作成しました。

マスの数	7	9	11
最小手数	15	24	35

➡

ペアの数	3	4	5
最小手数	15	24	35

そこで、数学苦手を名乗る部長Nくんが、手数の規則性に気づきました。

(以下、カエルの組数… $n$ (組), マスの数… $m$ (個) と表記します。)

### <ひらめき① 数学苦手のN部長>

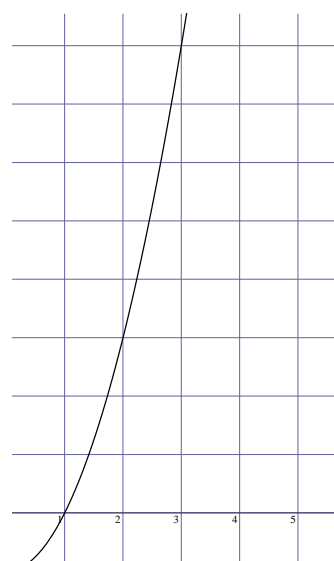
「 $15=3 \times 5$   $24=4 \times 6$   $35=5 \times 7$  ということは、

$a_n = n \cdot (n + 2) = n^2 + 2n$	だ！」
------------------------------------	-----

久々に最初の正解者になったN部長、テンションはMAXです。

…そんな部長とは別に、数学大好きな1年次のMくんは、対応表をプロットし、

「これをグラフにすると…何だか2次関数っぽいなあ。と、ということは、授業で習った  $y = ax^2 + bx + c$  に代入して…」



### <ひらめき② 数学大好きMくん>

組数を $x$ とすると

$y = x^2 + 2x$	だ！」
----------------	-----

…興奮気味な部員たち。気付くと時計は18:30。もう帰宅する時間です。

岡崎「今日は、各自が違う方法で結論を見つけたね。実にすばらしい。ところで、私も見つけたよ。」

### <ひらめき③ 黙ってられない顧問O>

15=4<sup>2</sup>-1 24=5<sup>2</sup>-1 35=6<sup>2</sup>-1 なので、マス の数を 2k-1 とすると

$a_n = k^2 - 1$	だよな。」
-----------------	-------

部員「意外にカンタン…。」

…翌日、昨日参加できなかった部員3名が集まり、昨日の研究報告を聞きました。

マス の数	7	9	11
最小手数	15	24	35

N部長「そんなわけで、最小手数は  $n^2 + 2n$  となりました！」

その結論を聞いて、暗算が得意のOくん。  
「俺はこんな法則を見つけたんだけど…」

### <ひらめき④ 暗算が得意なOくん>

(最小手数) = (1つ前のレベルの最小手数) + (マス の数)			
$a_n$	=	$a_{n-1}$	+ m

となっていないませんか？

その発言に対して、N部長。

N部長「あ、そう？とりあえず結論が出たので…」と、ひらめきを無視しようとしたので、顧問から教育的指導。

岡崎「これは大発見だよ。4人の結果がすべて一致することを確認しなさい。」  
一堂「え〜！」 (←これが「あるご」の現状です…)

…退勤し、久々の収穫に満足な岡崎。これまた中2の息子に、今日のいきさつを説明しました。

中2の息子R「ふーん、面白そうだね。僕も考えてみる。」

そう言って、ベネッセのWEB講座を受講するため、パソコン部屋に消えていきました。

その1時間後、「分かったよ。これで合っていると思うんだけど…」

## <ひらめき⑤ 中2の息子R>

例えば、3組のカエルがいるとすると、

飛び越えがなければ、最低 4(マス)×3(組)×2(対) マスの移動が必要。

ところで、異色のカエルが隣り合ったときは、

必ず一方が飛び越え、一方が待機するので、飛び越えの回数は 3(回)×3(組)

すなわち、最小手順は

$(3+1) \times 3 \times 2 - 3^2$ 。これを一般化すると、

$$a_n = (n+1) \times n \times 2 - n^2 = n^2 + 2n$$

で合ってる？

「合って…る。」 数学屋らしい論理的な説明に、息子の成長を感じる父。

---

…さらに翌日、今年度の「科学探検ひろば」のネタを決定するプレゼンが行われました。

結果、顧問の一押し「カエル跳びゲーム」とMくんの考案した「Hパズル」(有名なパズルですが、Mくんは本当に自分で発明したんだそうです。)に決定しました。

が、ここで気になることが一つ。

「お客さんに、最小手順をどう教えればよいか？」

そこで顧問が自習監督の傍ら、黒板でマグネットを移動しているうちに、発見しました。

「これは、いける！」

## <ひらめき⑥ 顧問O、ふたたび！>

ゲームをクリアするためには、移動するカエルの数を次のようにカウントすればよい。

例) 3組 ⇒ 赤1 → 青2 → 赤3 → (青3) → 赤3 → 青2 → 赤1

n組 ⇒ 1, 2, 3, …, n-1, n, (n), n, n-1, …, 3, 2, 1

したがって、

$$a_n = 2 \sum_{k=1}^n k + n = 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n = n^2 + 2n$$
 またつながった…。

この別解の連鎖はいつまで続くのか？！

…その数日後、3年次のある生徒が面接練習を申し込んできました。  
聞けば、数学が好きで、N大学数学科を推薦で受験することのこと。  
岡崎も気合を入れて練習に応じました。ところが…

「学んだ数学を社会にどのように生かしたいと思いますか？」  
「解析学を使ってエネルギー問題を解決したいと思っています。」  
「具体的にどのように解析学を使うのですか？」  
「…」

高校数学に真面目に取り組んでいるKくん。習った1つ1つの公式や定理の証明を知っているなど、  
良いところはたくさんあるのですが、数学の広い世界にはあまり触れていませんでした。

そこで…

「面接の最後に、ぜひ君に挑戦してもらいたい問題があるんだけど。」

カエル跳びゲームを体験したあと、表の数値を見てこう言いました。

### <ひらめき⑦ 高校数学が得意なKくん>

「15, 24, 35, … あ、階差数列だ。初項15、階差が9, 11, …,  $2n+7$  と考えると…、いや違う。」  
自ら表に1組・2組の欄を追加。

ペアの数	1	2	3	4	5
最小手数	3	8	15	24	35

「初項は3、階差は5, 7, …,  $2n+3$  と考えて…」

$$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+3) = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n + 3(n-1) = n^2 + 2n$$

満足してしばらく自作の一般項を眺めていたKさんに、こんな質問をしました。

「今まで、こんな風に現実にあるモノを使って、公式をつくったことある？」

「ないです。面白い。」

面接後、Kさんは笑顔で担任に挨拶し、N大学に向かったそうです。

### 3. 「ひらめき」分析

「カエル跳びゲーム」は、当初小学校低学年対象に用意したのですが、別解が7つも生まれ、思わず「数楽」することができました。

もうお分かりだと思いますが、発見した一般項(の表現法?)は以下の2種です。

$$\bullet a_n = n^2 + 2n \quad \bullet a_m = k^2 - 1 \quad (m=2k-1)$$

私が特に楽しいと思うのは、考え方の異なる式も、変型して一致するということです。P4の最後にある「4人の結果が一致することを確認せよ。」を例にしてみます。

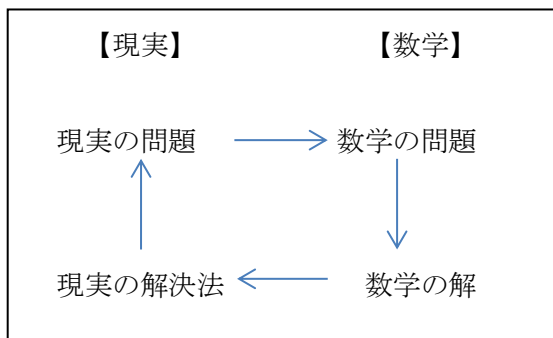
<ひらめき①=ひらめき④ の証明>

$$a_m = a_{n-1} + m = a_{n-1} + (2n + 1) = \{(n - 1)^2 + 2(n - 1)\} + (2n + 1) = n^2 + 2n$$

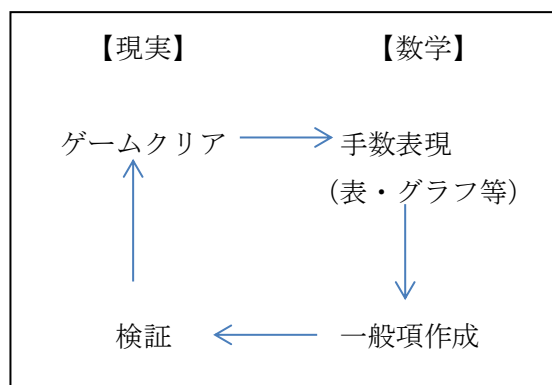
このように式が一致したときの感動こそ、次の課題に挑む原動力になるのではないのでしょうか。

そして、もう一つ気付いたのは、どの生徒の頭の中にも数学化サイクルが絶えず回っているということです。

(PISAが提唱する数学化サイクル)



(「カエル跳び」での思考順序)





具体的には、このような流れです。

- ①ルールを理解し、ゲームをクリアする
- ②最小手数の数表を作成する
- ③数的法則を発見する
  - ・最小手数を数式化した(2数の積・平方数・階差数列)
  - ・関数で近似した
  - ・アルゴリズムを作成した
- ④数表との一致を確認する
- ⑤原理「なぜ、そうなるか？」を考える。

これらの活動を進めるには、以下の要素が重要だと考えています。

- (1) 現実の問題を数学の問題に変換することができるか。  
…日常扱っている「言語」を、数学用語に変換する必要があります。
- (2) 既知の公式や定理から、適切な方法を選択し、利用することができるか。  
…これまでの学習で身に着けた武器(=数学の歴史遺産)の量と質が問われます。

(1)も(2)もどちらかが欠けていれば、途中でサイクルが止まります。常にバランスが大切です。「言語活動」「数学的活動」が進められている状況だと思いますが、これまでのオーソドックスな指導法も、いずれ最注目されるのではないかと、私は予測しています。

#### 4. 教材としての長所

科学館の展示を控え、「あるご」では様々な人にゲームを体験してもらいました。どの人も途中であきらめることなく、自らクリアまで挑戦し続けました。このゲームの魅力は、どんな点なのでしょう？

- ・ルールが単純で、先が読みやすい
- ・誰もが必ず、同じ方法で、最小手順を達成できる
- ・数的法則が見つかりやすく、また複数存在する
- ・カエルというキャラが可愛いこと(?)

ハノイの塔(参考資料③)に似ていますが、アルゴリズムが単純で、誰にでも取り組みやすい点が長所です。

参加された先生方、webで本レポートをご覧になった皆さん。  
ぜひ、ご家族や生徒と楽しんでみてください。

## 5. さいごに

1つの問題で7つの別解が生まれたことは、意外な結果でした。

実はもう1つ、意外な体験をしました。それは…

「学力と課題解決能力は、未だ結びついていない。」ということです。

今回9名の方にゲームを経験してもらいましたが、意外なことに成績優秀な生徒に限って、ゲームクリアにとってもてこずっていました。

しかし、いざ漸化式が出来上がって、一般項を求めるとなると、そのような生徒が力を発揮します

純粋数学・応用数学、どちらが本当の数学か、という議論もありますが、私は「カエル跳び」くらいの解析ができないと、数学を学んだ意味がないような気がします。お読みいただいた皆さんは、どう思われますか？

(参考資料)

- ①科学探検ひろば参加報告(第88回数実研)
- ②数学クラブ「ますまて」の思い出(第87回数実研)
- ③おもしろハノイ～パズルで数楽しよう(中村文則先生)
- ④カエル跳びゲーム(青木芳文先生 数学の部屋 <http://math.a.la9.jp/kaeru.htm>)

\* 質問はコチラまで → [zakky@hokkaido-c.ed.jp](mailto:zakky@hokkaido-c.ed.jp)

(2014.11.29 第91回北海道数学教育実践研究会にて発表)