

## ゆびすま2

旭川南高等学校 岡崎知之

### 0. はじめに

前回(第93回)の数実研で、有朋高校の大谷健介先生が「ゆびすま1」を発表された。身近で有名なゲームについて解析が行われたことから、発表後、多数の先生の間で話題になった。

「ゆびすま1」での大谷先生の見解は以下のとおりである。

(課題) 「ゆびすま」では、先攻・後攻のどちらが有理か？

(結論) 先攻が勝つ確率は、

後攻の指の本数が「0」「1」「2」のいずれかなので、 $1/3$

後攻が勝つ確率は、

$$(\text{先攻が勝たない確率}) \times (\text{後攻が勝つ確率}) = 2/3 \times 1/3 = 2/9$$

⇒ 先攻が有理

しかし、この理論は「引き分けを考慮せず、1勝する場合」に限定したものである。

そこで、この限定条件をなくした場合について考えてみた。

### 1. 「ゆびすま」について

「ゆびすま」は古くから日本の学生の間で流行っていたゲームだが、「smapsmap」という番組で、紹介され、ブームが再燃したらしい。ちなみに、筆者が小学生の頃は、ゲームを行うときの掛け声から「いっせーの、で」と名付けられていたが、現在の高校生にはこの名称はまったく通じなかった。

他の指遊び同様、ローカルルールが多数存在するが、今回は以下のルールで解析を行った。

< Rules >

- 2人が先攻・後攻の順に交互に攻撃を行う。
  - 攻撃側が指の総本数を宣言したと同時に、指を立てる。
  - 宣言した総本数が、実際に立てた総本数と一致した場合、攻撃された側は手を1つ下ろす。
  - 両手を下したプレイヤーが負け。
- \* 指は親指のみを立てることができる。ただし、両親指を立てないことも可能。

## 2. 課題

「ゆびすま」では、先攻・後攻のどちらが有理か？

## 3. 解析

プレイヤーA・Bを、それぞれ先攻・後攻とする。

プレイヤーAが  $m$  勝  $n$  敗 で勝つ確率を、 $p_{mn}$  と表記すると、

起こり得るパターンは、 $p_{22}, p_{21}, p_{12}, p_{02}$  のいずれかである。

解析にあたり、以下の表記を使う。

(表記)

先攻・後攻をまとめて、「セット」とよぶ。

Aの 勝ち  $\Rightarrow$  W 負け  $\Rightarrow$  L 引き分け  $\Rightarrow$  D

(例)	1	2	3	...	$n$	$\leftarrow$	セット数
	$\frac{D}{3} \frac{D}{3}$	$\frac{W}{3} \frac{D}{3}$	$\frac{D}{2} \frac{L}{3}$	...	$\frac{W}{2}$	$\leftarrow$	勝敗
	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{2}$	$\leftarrow$	確率

\* A, Bの勝利により、確率が変動する点に注意が必要です。

(i) 2勝0敗 ( $p_{20}$ )

	$m$	$n$	$\leftarrow$	セット数				
	$\frac{D}{3} \frac{D}{3}$	...	$\frac{W}{3} \frac{D}{3}$	$\frac{D}{2} \frac{D}{3}$	...	$\frac{W}{2}$	$\leftarrow$	勝敗
	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$	...	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$	...	$\frac{1}{2}$	$\leftarrow$	確率

$$\Rightarrow p_{20} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \left( \left( \frac{4}{9} \right)^{m-1} \left( \frac{2}{9} \right) \left( \frac{1}{3} \right)^{n-(m+1)} \left( \frac{1}{2} \right) \right) \dots (\bullet)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{3}{4} \left( \frac{1}{3} \right)^n \sum_{m=1}^{n-1} \left( \frac{4}{3} \right)^m \right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left( \left( \frac{4}{9} \right)^{n-1} - \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1} \right)$$

$$p_{20} = \frac{3}{10}$$

(ii) 2勝1敗 (  $p_{21}$  )

$\alpha$ ) 各セットにDを含む(WLがない)場合

	l		m		n	← セット数	
$\frac{D}{3} \cdot \frac{D}{3}$	...	$\frac{D}{3} \cdot \frac{L}{3}$	$\frac{D}{3} \cdot \frac{D}{2}$	...	$\frac{W}{3} \cdot \frac{D}{2}$	$\frac{D}{2} \cdot \frac{D}{2}$	← 勝敗
$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$		$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	← 確率

または

	l		m		n	← セット数	
$\frac{D}{3} \cdot \frac{D}{3}$	...	$\frac{W}{3} \cdot \frac{D}{3}$	$\frac{D}{2} \cdot \frac{D}{3}$	...	$\frac{D}{2} \cdot \frac{L}{3}$	$\frac{D}{2} \cdot \frac{D}{2}$	← 勝敗
$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$		$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$	...	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	← 確率

いずれも積の順序が入れ替わっただけで、値は同じ。よって

$$\begin{aligned} \Rightarrow & 2 \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \left( \left(\frac{4}{9}\right)^{l-1} \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{m-(l+1)} \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-(m+1)} \left(\frac{1}{2}\right) \right) \dots (\star) \\ & = 2 \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=2}^{n-1} \left( 2 \left(\frac{1}{4}\right)^n \left( \left(\frac{4}{3}\right)^{2m-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^m \right) \right) \\ & = 2 \sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{27}{14} \left( \left(\frac{4}{9}\right)^n - \left(\frac{16}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) - 6 \left( \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) \right) \\ & = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

$\beta$ ) あるセットにWLを含む場合

	m		n	← セット数		
$\frac{D}{3} \cdot \frac{D}{3}$	...	$\frac{W}{3} \cdot \frac{L}{3}$	$\frac{D}{2} \cdot \frac{D}{2}$	...	$\frac{W}{2}$	← 勝敗
$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$		$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	← 確率

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \left( \left(\frac{4}{9}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{9}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-(m+1)} \left(\frac{1}{2}\right) \right) \dots (\star) \\ & = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{9}{14} \left(\frac{4}{9}\right)^n - \frac{8}{7} \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) \\ & = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

以上より

$$p_{21} = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

(iii) 1勝2敗 ( $p_{12}$ )

$\alpha$ ) 各セットにDを含む(WLがない)場合

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & l & & m & & n & \leftarrow \text{セット数} \\
 \frac{D}{2} \frac{D}{3} & \cdots & \frac{W}{1} \frac{D}{3} & \frac{D}{2} \frac{D}{3} & \cdots & \frac{D}{2} \frac{L}{3} & \frac{D}{2} \frac{D}{2} & \cdots & \frac{E}{1} \frac{L}{2} & \leftarrow \text{勝敗} \\
 \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} & & \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} & \cdots & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & \leftarrow \text{確率}
 \end{array}$$

または

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & l & & m & & n & \leftarrow \text{セット数} \\
 \frac{D}{2} \frac{D}{3} & \cdots & \frac{D}{2} \frac{L}{3} & \frac{D}{2} \frac{D}{3} & \cdots & \frac{W}{1} \frac{D}{3} & \frac{D}{2} \frac{D}{2} & \cdots & \frac{E}{1} \frac{L}{2} & \leftarrow \text{勝敗} \\
 \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} & & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & \leftarrow \text{確率}
 \end{array}$$

いずれも積の順序が入れ替わっただけで、値は同じ。

また、これらの計算式は $p_{21}$  の $\alpha$ のパターン(☆)の計算式と比べて

最後の $1/2$ が $1/4$ に変化しただけである。よって、 $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15}$

$\beta$ ) あるセットにWLを含む場合

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & m & & n & \leftarrow \text{セット数} \\
 \frac{D}{2} \frac{D}{3} & \cdots & \frac{W}{1} \frac{L}{3} & \frac{D}{2} \frac{D}{3} & \cdots & \frac{E}{1} \frac{L}{2} & \leftarrow \text{勝敗} \\
 \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} & & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & \leftarrow \text{確率}
 \end{array}$$

または

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & m & & n & \leftarrow \text{セット数} \\
 \frac{D}{2} \frac{D}{3} & \cdots & \frac{D}{2} \frac{L}{3} & \frac{D}{2} \frac{D}{3} & \cdots & \frac{W}{1} \frac{L}{3} & \leftarrow \text{勝敗} \\
 \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} & & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} & \leftarrow \text{確率}
 \end{array}$$

(上段)…この計算式も $p_{21}$  の $\beta$ のパターン(★)の計算式と比べて最後の $1/2$ が $1/4$ に変化

しただけである。よって、 $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15}$

(下段)…この計算式は $p_{20}$  のパターン(●)の計算式と比べて最後の $1/2$ が $1/6$ に変化

しただけである。よって、 $\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$

以上より

$$p_{12} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{7}{30}$$

(iv) 0勝2敗 (  $p_{02}$  )

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & m & & n & \leftarrow \text{セット数} \\
 \frac{D}{3} \cdot \frac{D}{3} & \cdots & \frac{D}{3} \cdot \frac{L}{3} & \frac{D}{3} \cdot \frac{D}{2} & \cdots & \frac{D}{3} \cdot \frac{L}{2} & \leftarrow \text{勝敗} \\
 \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} & & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \cdots & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \leftarrow \text{確率}
 \end{array}$$

この計算式は  $p_{20}$  のパターン(●)の計算式と比べて最後の  $1/2$  が  $1/6$  に変化しただけである。よって、

$$p_{02} = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

#### 4. たしかめ

$$p_{20} + p_{21} + p_{12} + p_{02} = \frac{3}{10} + \frac{4}{15} + \frac{7}{30} + \frac{1}{5} = \frac{9+8+7+6}{30} = \frac{30}{30}$$

#### 5. 結論

「ゆびすま」の先攻における勝敗率は以下のとおりである

勝敗	確率	百分率(近似値)
2勝0敗	3/10	30%
2勝1敗	4/15	27%
1勝2敗	7/30	23%
0勝2敗	1/5	20%

したがって、

「ゆびすまでは、先攻が有利である。」

(先攻の勝利確率 : 後攻の勝利確率 = 17 : 13 = 1.3 : 1 )

## 6. 感想

- 高校数学の問題のほとんどは、「引き分けなし」だが、「引き合わせあり」にした場合の論理と計算の複雑さが体感できた
- 毎回楽しい話題を提供してくれる大谷先生は「ネタの宝石箱」だと思った。
- 課題レベルとしては理数科の生徒なら取り組みそうなので、よろしければ使ってください。  
(今回はオリジナル解析ですが、もちろん著作権フリーです。)

大谷先生、ネタをおいしくいただきました。またよろしくお願いします！

(参考資料)

「ゆびすま1」(大谷健介先生 第93回数実研レポート)

(協力)

大谷健介先生(ネタ提供)

数学研究部「あるご」部員の皆さん(実験協力)

岡崎凜(論理展開チェック)

(2015年10月3日数学教育実践研究会にて発表)