

分ける？分けない？

北海道上川高等学校

岡崎知之

1. 問題提起

$$\sum_{k=10}^{50} {}_{60}C_k \cdot {}_{40}C_{50-k} = {}_n C_r \text{ を満たす } n, r \text{ を求めよ。 (明治大学入試問題)}$$

どうやって解きますか…？ (解答はレポートの最後で)

2. 命題

自然数 l, m, n ($n \leq m \leq l$) に対し、以下が成り立つ。

$${}_{l+m}C_n = \sum_{k=0}^n ({}_l C_k \cdot {}_m C_{n-k})$$

3. 発見

Q. 1から9までの番号札9枚から4枚を同時に引くとき、少なくとも1枚が偶数の番号である確率を求めよ。

(数研出版「新編数学A」のP49練習55)

A. 余事象である「すべての札が奇数札である」確率を利用する。

$$1 - \frac{{}_5 C_4}{{}_9 C_4} = \frac{{}_9 C_4 - {}_5 C_4}{{}_9 C_4} \dots (\star)$$

* 生徒には常日頃、別解などでたしかめをすることが大切であると指導している。

そこで、余事象を利用しない方法も提示してみた。

偶数札が1枚の場合	$\frac{{}_4 C_1 \cdot {}_5 C_3}{{}_9 C_4}$	2枚の場合	$\frac{{}_4 C_2 \cdot {}_5 C_2}{{}_9 C_4}$
3枚の場合	$\frac{{}_4 C_3 \cdot {}_5 C_1}{{}_9 C_4}$	4枚の場合	$\frac{{}_4 C_4 \cdot {}_5 C_0}{{}_9 C_4}$

以上より、求める確率は

$$\frac{{}_4 C_1 \cdot {}_5 C_3}{{}_9 C_4} + \frac{{}_4 C_2 \cdot {}_5 C_2}{{}_9 C_4} + \frac{{}_4 C_3 \cdot {}_5 C_1}{{}_9 C_4} + \frac{{}_4 C_4 \cdot {}_5 C_0}{{}_9 C_4} \dots (\star)$$

理屈上 $(\star) = (\star)$ なので、

$${}_9 C_4 - {}_5 C_4 = {}_4 C_1 \cdot {}_5 C_3 + {}_4 C_2 \cdot {}_5 C_2 + {}_4 C_3 \cdot {}_5 C_1 + {}_4 C_4 \cdot {}_5 C_0$$

ここで、

$${}_5 C_4 = {}_4 C_0 \cdot {}_5 C_4 \text{ と考えると}$$

$${}_9 C_4 = {}_4 C_0 \cdot {}_5 C_4 + {}_4 C_1 \cdot {}_5 C_3 + {}_4 C_2 \cdot {}_5 C_2 + {}_4 C_3 \cdot {}_5 C_1 + {}_4 C_4 \cdot {}_5 C_0 \dots (1) \text{ となり、「2. 命題」を利用した1例となる。}$$

4. 公式の意義

(1)の式は、このように言い換えることができる

例) 男子5人、女子4人の計9人のクラスで、代表者4名を選ぶ方法として、

男子・女子を分けずに選ぶ方法

$${}_9C_4 \cdots (2)$$

男子・女子を分けて、合計4人になるように、それぞれから選ぶ方法

$${}_4C_0 \cdot {}_5C_4 + {}_4C_1 \cdot {}_5C_3 + {}_4C_2 \cdot {}_5C_2 + {}_4C_3 \cdot {}_5C_1 + {}_4C_4 \cdot {}_5C_0 \cdots (3)$$

(2)・(3)は要領が異なるものの、やっていることは同じである。

よって、分けようが、分けまいが、組合せは等しくなる。

5. 数学的証明

$(1+x)^{l+m} = (1+x)^l (1+x)^m$ の両辺を、2項展開すると

$$(\text{左辺}) = \cdots + {}_{l+m}C_n x^n + \cdots$$

$$(\text{右辺}) = ({}_lC_0 x^0 + {}_lC_1 x^1 + \cdots + {}_lC_{n-1} x^{n-1} + {}_lC_n x^n + \cdots + {}_lC_l x^l)$$

$$\cdot ({}_mC_0 x^0 + {}_mC_1 x^1 + \cdots + {}_mC_{n-1} x^{n-1} + {}_mC_n x^n + \cdots + {}_mC_m x^m)$$

$$= \cdots + ({}_lC_0 \cdot {}_mC_n + {}_lC_1 \cdot {}_mC_{n-1} + \cdots + {}_lC_n \cdot {}_mC_0) x^n + \cdots$$

係数比較によって、「2. 命題」が成り立つ。

6. 「1. 問題提起」の解答

言葉で考えるならば、

「男子60人、女子40人の計100人のクラスで、代表者50名を選ぶ組合せ」を考えているので、**解答は、n=100, r=50。**

数式を利用するならば、 $(1+x)^{100} = (1+x)^{60} (1+x)^{40}$ の2項展開を考えればよい。

7. 補足

同様の考え方で、グループ数を3以上にした場合も、分ける場合・分けない場合に差はないと考えられる。

たまには遠回りな計算も役に立つのだなあ、と感じた瞬間でした。

(参考にしたHP…「私的数学塾」 http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/reminder.htm)

8. おまけ

このレポートを作成した後、言葉で考えて解ける問題がもう1問見つかったので、紹介します。

$$a_1 = 1, \frac{2^n}{n!} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} \quad \text{の漸化式で表される数列 } a_n \text{ の一般項を求めよ。}$$

(北海道大学—98後期理系)

(言葉での解法)

$$2^n = n! \sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} \quad \text{と変形すると、}$$

(左辺) = (コインをn回投げたときの、表裏の出方の数) と考えられる(←重複順列)。…(4)

これを、以下のように別の考え方で求める。

$$\text{コインの 表} \times 0 \text{枚, 裏} \times n \text{枚} \quad \text{を並び替える} \Rightarrow \frac{n!}{0!n!} \quad (\leftarrow \text{同じものが複数含まれる順列})$$

$$\text{表} \times 1 \text{枚, 裏} \times (n-1) \text{枚} \quad \text{を並び替える} \Rightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!}$$

…

$$\text{表} \times n \text{枚, 裏} \times 0 \text{枚} \quad \text{を並び替える} \Rightarrow \frac{n!}{n!0!}$$

以上が (4)の全事象となるので、(4)とこれらの総和は等しい
よって

$$2^n = n! \sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$n! \sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{(n+1-k)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{((n+2-k)-1)!}$$

したがって

$$a_n = \frac{1}{(n-1)!} \quad (\text{この一般項は } n=1 \text{ のときも成り立つ})$$

ps. 数学的証明(?)も考えていただけると幸いです。

(2011年1月29日 発表)