分ける？分けない？

北海道上川高等学校
岡崎知之

1．問題提起

$\displaystyle\sum_{k=10}^{50} {}_{60}C_k \cdot {}_{40}C_{50-k} = {}_nC_r$　を満たす ｎ， ｒ を求めよ。（明治大学入試問題）

どうやって解きますか…？（解答はレポートの最後で）

2．命題

自然数　$l,\ m,\ n$　（$n \leq m \leq l$）に対し、以下が成り立つ。

$$ {}_{l+m}C_n = \sum_{k=0}^{n} ({}_lC_k \cdot {}_mC_{n-k}) $$

3．発見

Q．1から9までの番号札9枚から4枚を同時に引くとき、少なくとも1枚が偶数の番号である確率を求めよ。

（数研出版「新編数学A」のP49練習55）

A．余事象である「すべての札が奇数札である」確率を利用する。

$$1-\frac{{}_5C_4}{{}_9C_4}=\frac{{}_9C_4-{}_5C_4}{{}_9C_4} \quad \cdots(☆)$$

＊　生徒には常日頃、別解などでたしかめをすることが大切であると指導している。
そこで、余事象を利用しない方法も提示してみた。

偶数札が1枚の場合　$\dfrac{{}_4C_1 \cdot {}_5C_3}{{}_9C_4}$　　　2枚の場合　$\dfrac{{}_4C_2 \cdot {}_5C_2}{{}_9C_4}$

3枚の場合　$\dfrac{{}_4C_3 \cdot {}_5C_1}{{}_9C_4}$　　　4枚の場合　$\dfrac{{}_4C_4 \cdot {}_5C_0}{{}_9C_4}$

以上より、求める確率は

$$\frac{{}_4C_1 \cdot {}_5C_3}{{}_9C_4}+\frac{{}_4C_2 \cdot {}_5C_2}{{}_9C_4}+\frac{{}_4C_3 \cdot {}_5C_1}{{}_9C_4}+\frac{{}_4C_4 \cdot {}_5C_0}{{}_9C_4} \quad \cdots(★)$$

理屈上　（☆）＝（★）　なので、

$${}_9C_4-{}_5C_4={}_4C_1 \cdot {}_5C_3+{}_4C_2 \cdot {}_5C_2+{}_4C_3 \cdot {}_5C_1+{}_4C_4 \cdot {}_5C_0$$

ここで、

${}_5C_4={}_4C_0 \cdot {}_5C_4$　と考えると

${}_9C_4={}_4C_0 \cdot {}_5C_4+{}_4C_1 \cdot {}_5C_3+{}_4C_2 \cdot {}_5C_2+{}_4C_3 \cdot {}_5C_1+{}_4C_4 \cdot {}_5C_0$　…（1） となり、「2．命題」を利用した1例となる。

４．公式の意義

（１）の式は、このように言い換えることができる

例） 男子５人、女子４人の計９人のクラスで、代表者４名を選ぶ方法として、

男子・女子を分けずに選ぶ方法

${}_9C_4$ …（２）

男子・女子を分けて、合計４人になるように、それぞれから選ぶ方法

${}_4C_0\cdot{}_5C_4+{}_4C_1\cdot{}_5C_3+{}_4C_2\cdot{}_5C_2+{}_4C_3\cdot{}_5C_1+{}_4C_4\cdot{}_5C_0$ …（３）

（２）・（３）は要領が異なるものの、やっていることは同じである。

よって、<u>分けようが、分けまいが、組合せは等しくなる。</u>

５．数学的証明

$(1+x)^{l+m}=(1+x)^l(1+x)^m$ の両辺を、２項展開すると

（左辺）＝…＋${}_{l+m}C_n x^n$＋…

（右辺）＝（${}_lC_0x^0+{}_lC_1x^1+\cdots+{}_lC_{n-1}x^{n-1}+{}_lC_nx^n+\cdots+{}_lC_lx^l$）

・（${}_mC_0x^0+{}_mC_1x^1+\cdots+{}_mC_{n-1}x^{n-1}+{}_mC_nx^n+\cdots+{}_mC_mx^m$）

$=\cdots+({}_lC_0\cdot{}_mC_n+{}_lC_1\cdot{}_mC_{n-1}+\cdots+{}_lC_n\cdot{}_mC_0)x^n+\cdots$

係数比較によって、「２．命題」が成り立つ。

６．「１．問題提起」の解答

言葉で考えるならば、

「男子６０人、女子４０人の計１００人のクラスで、代表者５０名を選ぶ組合せ」を考えているので、**解答は、n＝１００，r＝５０。**

数式を利用するならば、$(1+x)^{100}=(1+x)^{60}(1+x)^{40}$ の２項展開を考えればよい。

７．補足

同様の考え方で、グループ数を３以上にした場合も、分ける場合・分けない場合に差はないと考えられる。

たまには遠回りな計算も役に立つのだなぁ、と感じた瞬間でした。

（参考にしたHP…「私的数学塾」 http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/reminder.htm ）

8．おまけ

このレポートを作成した後、言葉で考えて解ける問題がもう1問見つかったので、紹介します。

$a_1 = 1$，$\dfrac{2^n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k}$　の漸化式で表される数列 a_n の一般項を求めよ。

（北海道大学ー98後期理系）

（言葉での解法）

$2^n = n!\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k}$ と変形すると、

（左辺）＝（コインをn回投げたときの、表裏の出方の数）と考えられる（←重複順列）。　…（4）

これを、以下のように別の考え方で求める。

コインの　表×０枚，裏×ｎ枚　　を並び替える　⇒ $\dfrac{n!}{0!n!}$　（←同じものが複数含まれる順列）

表×１枚，裏×（ｎー１）枚　を並び替える　⇒ $\dfrac{n!}{1!(n-1)!}$

…

表×ｎ枚，裏×０枚　　を並び替える　⇒ $\dfrac{n!}{n!0!}$

以上が （4）の全事象となるので、（4）とこれらの総和は等しい

よって

$$2^n = n!\sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$n!\sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(n-k)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{(n+1-k)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{((n+2-k)-1)!}$$

したがって

$a_n = \dfrac{1}{(n-1)!}$　（この一般項はｎ＝１のときも成り立つ）

ps．数学的証明（？）も考えていただけると幸いです。

（2011年1月29日　発表）