パスカルの三角形の小発見

北海道上川高等学校　岡崎知之
佐々木崇裕

1．命題

パスカルの三角形について

1＋1	$=2=2^1$	← 1段目
1＋2＋1	$=4=2^2$	← 2段目
1＋3＋3＋1	$=8=2^3$	← 3段目
1＋4＋6＋4＋1	$=16=2^4$	← 4段目
…		
1＋　…　＋1	$=2^n$	← n段目　が成り立つ。（数学Ⅰの授業で、生徒が発見。）

2．正攻法

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$　の証明

（1）数学的帰納法で正面突破（要旨のみ、パスカルの三角形の性質を利用）

$n=k$　について成り立つと仮定

$${}_kC_0+{}_kC_1+{}_kC_2+\cdots+{}_kC_k=2^k$$

$n=k+1$　のとき

$$\begin{aligned}
&{}_{k+1}C_0+{}_{k+1}C_1+{}_{k+1}C_2+\cdots+{}_{k+1}C_k+{}_{k+1}C_{k+1}\\
&=1+(({}_kC_0+{}_kC_1)+({}_kC_1+{}_kC_2)+\cdots+({}_kC_{k-1}+{}_kC_k))+1\\
&=1+(1+2({}_kC_1+{}_kC_2+\cdots+{}_kC_{k-1})+1)+1\\
&=2+(2+2(2^k-2))\\
&=4+2^{k+1}-4\\
&=2^{k+1}
\end{aligned}$$

ゆえに、任意の自然数nについて命題は成り立つ。

（2）二項定理を用いた簡潔な証明（佐々木案）

２項定理より

$$(x+1)^n={}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}+\cdots+{}_nC_n$$

この式に１を代入すると

$$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$$

この証明で、数学的決着はほぼ終了と思われるが、
先日数学クラブ（＊）で取り扱った問題で、この式に具体的意味（イメージ）を持たせることができた。

＊昨年までは地下組織でしたが、今年同好会に認定されました！

3．命題の具体的意味

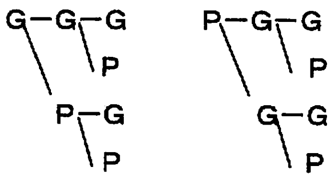
＜5月26日の「数学クラブますまて」で研究した問題＞

Q. 3人でじゃんけんするとき、勝敗が決まる場合は何通りあるか。(←実際には「n人であいこ」でした。)

(1)数学クラブメンバーの発想

勝敗が決まる⇔出た手が2種類のみ　なので、

グーとパーのみ出た場合



全部で 2^3 通り、すなわち8通りあるように見えるが、うち2通りはあいこなので、

(2^3-2)通り、すなわち6通りである。

他にも、パーとチョキ、チョキとグーのパターンがあるので、

勝敗が決まるすべてのパターンは

$3\times(2^3-2)$　通りとなる。

(2)数学クラブ「岡崎」の発想

グーとパーのみ出た場合

グーが1つ　⇒　${}_3C_1$　通り

グーが2つ　⇒　${}_3C_2$　通り

すなわち、$({}_3C_1+{}_3C_2)$通りとなり、(1)同様、パーとチョキ、チョキとグーのパターンがあるので、

勝敗が決まるすべてのパターンは

$3\times({}_3C_1+{}_3C_2)$　通りとなる。

(3)発想をつなげる

(1)は重複順列、(2)は組合せを利用した解法であるが、同じ問題の解である。

それぞれをn人の場合について考えると、

(1)では　$3\times(2^n-2)$

(2)では　$3\times({}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-2}+{}_nC_{n-1})$

「＝」でつなげると

$$3\times(2^n-2)=3\times({}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-2}+{}_nC_{n-1})$$

$$2^n-2={}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-2}+{}_nC_{n-1}$$

$$2^n={}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-2}+{}_nC_{n-1}\underline{+2}$$

$$2^n=\underline{{}_nC_0}+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-2}+{}_nC_{n-1}+\underline{{}_nC_n}$$ ←「 $2={}_nC_0+{}_nC_n$ 」ということですね。

(1年生Mさんの発想)＝(数学クラブメンバーの発想)＝(佐々木先生の発想)＝(岡崎の発想)

4人の発想がつながって、めでたし、めでたし。

(2010年6月12日発表)