モンティ・ホール問題の実験に関する報告

2024 年 11 月 30 日

旭川藤星高等学校　佐藤徹章

1　モンティ・ホール問題について

問題の設定は、以下の通り [1]。

　プレイヤーの前に 3 つの扉がある。1 つの扉の後ろには景品の新車があり、残り 2 つの扉の後ろにはハズレを意味するヤギがいる。景品の扉を開ければ、プレイヤーはその景品をもらうことができる。

　まず、プレイヤーが 1 つの扉を選択する。その後に司会者は番組を盛り上げるために、選ばれていない 2 つの扉のうち 1 つを開け、それがハズレであることを示して見せる。そしてプレイヤーにこうささやくのだ。

「あなたにもう一度チャンスを与えます。最初の扉のままでもかまいませんし、もう 1 つの扉に変えてもかまいません。どうしますか？」

2　実験方法と結果

実験や結果の集約は、長尾先生の先行事例 [2] を参考に行った。

2.1　方法

準備したものは、紙コップ・当たりを示す星・結果記録用紙である。生徒は数名のグループに分かれ、ゲームマスター・プレイヤー・記録係をそれぞれ順に担当する。

2.2　実験結果

複数のクラスで行った結果を合算したものを表にまとめた。

	変更あり		変更なし	
	当たり	はずれ	当たり	はずれ
回数	342	200	223	406
合計	542		629	
当たり確率	0.6310		0.3545	

3 「数学 A」 条件付き確率の話題として

3.1 数式を用いた説明

挑戦者が「変更」を行うと当たる確率が 2 倍になる。当たりがランダムに入っていることを前提に、条件付き確率を用いた説明を行う。

(i) チャレンジャーがコップ a を選択したとき
コップ a, b, c にそれぞれ当たりが入っている事象をそれぞれ A, B, C とする。また、ゲームマスターがコップ c を開ける事象を X とする。

$$P_A(X) = \frac{1}{2},\ P_B(X) = 1,\ P_C(X) = 0$$

であるから、

$$\begin{aligned} P(X) &= P(A \cap X) + P(B \cap X) + P(C \cap X) \\ &= P(A) \cdot P_A(X) + P(B) \cdot P_B(X) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ゆえに、コップ c を開けたとき、コップ a とコップ b に当たりが入っている確率はそれぞれ

$$\begin{aligned} P_X(A) &= \frac{P(X \cap A)}{P(X)} \\ &= \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad \text{(変更なし)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_X(B) &= \frac{P(X \cap B)}{P(X)} \\ &= \frac{P(B \cap X)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{(変更あり)} \end{aligned}$$

ゲームマスターがコップ b を開けるときも同様の議論ができる

(ii) チャレンジャーがコップ b または c を選択したとき
(i) と同様に説明がつく。

3.2 ゲームマスターが正解を知らないケース

ゲームマスターはあらかじめ正解を知らないとする。このとき、挑戦者は「変更」を行うと当たる確率はどうなるか。ただし、ゲームマスターがたまたま正解を開けてしまった場合、ゲームをやり直すことにする。

(i) チャレンジャーがコップ a を選択したとき

コップ a, b, c にそれぞれ当たりが入っている事象をそれぞれ A, B, C とする。また、ゲームマスターがコップ c を開ける事象を X とする。

$$P_A(X) = \frac{1}{2},\ P_B(X) = \frac{1}{2},\ P_C(X) = \frac{1}{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned} P(X) &= P(A \cap X) + P(B \cap X) + P(C \cap X) \\ &= P(A) \cdot P_A(X) + P(B) \cdot P_B(X) + P(C) \cdot P_C(X) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ゆえに、コップ c を開けたとき、コップ a とコップ b に当たりが入っている確率はそれぞれ

$$\begin{aligned} P_X(A) &= \frac{P(X \cap A)}{P(X)} \\ &= \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad \text{(変更なし)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_X(B) &= \frac{P(X \cap B)}{P(X)} \\ &= \frac{P(B \cap X)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad \text{(変更あり)} \end{aligned}$$

また、ゲームのやり直しが発生する確率は、

$$\begin{aligned} P_X(C) &= \frac{P(X \cap C)}{P(X)} \\ &= \frac{P(C \cap X)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ゲームマスターがコップ b を開けるときも同様の議論ができる

(ii) チャレンジャーがコップ b または c を選択したとき

こちらも (i) と同様に説明がつく。

参考文献

[1] 池田洋介, 「読むだけで楽しい数学のはなし」, 新紀元社, 2017.
[2] 長尾良平,「確率・統計で One more thing」 第 96 回数学教育実践研究会レポート
[3] 永野裕之, 「教養としての「数学 IA」」, NHK 出版, 2022.