平成２５年１１月３０日

第８７回数学教育実践研究会　レポート

『三角比の表から導入する授業』

釧路商業高等学校　杉本　拓也

発表の動機

釧路商業高校の杉本です。よろしくお願いします。

近年導入された「データの分析」。

「データの分析って大学の研究やマーケティング等でも使うよなぁ。」

「ところで『データ』って教科書ってないっけ？」

見つけたのが教科書巻末にある『三角比の表』。

「この三角比の表を軸に授業を組み立てられないかな？」

と考え、色々試してみました。そのときに生徒が色々と考えてくれたのですが、生徒の発想は本当に「柔軟で面白いなぁ」と感じました。その点を合わせて発表したいと思いレポートいたします。

【三角比の表を用いた授業】

①三角比の利用
実際に学校の高さを計測しに行く

②三角比の相互関係
表から公式を発見

③鈍角の三角比
表から90°以降の正負を予測
グラフを描いていく

①②について発表いたします（③は大しておもしろい内容にならなかったので割愛します）。

①学校の高さを実際に測ってみる！

「座学の王様」と言われているのに反抗して外で体験的な活動をしてみました。

	生徒の動き	教師の働きかけ
１ｈ目	（東京タワーの高さを測る問題の後）	
	三角比を利用して直接測れないものの高さを、実際に測ろう！	
		「何の高さを計測したい？」
	「先生の身長！」	
		「もっと大きいものいこうよ」
	「学校！」「スカイツリー！」	
		「スカイツリーは遠いから、今回は学校を測ってみよう！」
	「いえーい！」（ノリノリ）	
		「では、どうやったら測れる？」
	「あれ、前やった東京タワーの測り方で」	
		「その通りだね。その問題では何がわかってた？」
	「辺ＢＣ（影の長さ）と tanA（角度）」	
		「でしたね。では問題。」
	どうやったら、「影の長さ」と「角度」を測れる？	
	「影はメジャーで！」	
		「うん、では体育科の先生に 50M のメジャーを貸してもらうね。」
	「先生、100Mのはないの？影が 50M より長かったらどうする？」	
		「なるほど。ということは影の長さが50M以上にならない時間帯に測らないといけないね！いつ頃がいい？」
	「昼に太陽は真ん中だから、１１時とか、１３時とかだと短いね！」	
		「ちょうど次回は３時間目（10：55～11：45）だ。50Mメジャーでも大丈夫そうだね。」
		「では、角度はどうしたら測れる？」
	「分度器。」	
		「だけど、分度器で角度を測るときは斜めの線が必要だよ。この線はどうやって

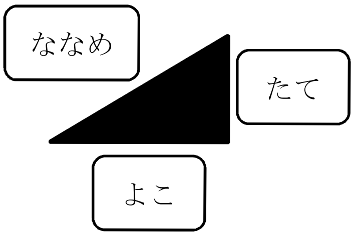
		出す？」
	「…。校舎の屋上からメジャーを引っ張ってくる！」 「だったら、校舎に垂らして直接測った方が良くない？」	
		「そうだね、屋上は危険なので使いたくないです。また、校舎なら屋上があるけど、スカイツリーならてっぺんには立てないでしょ？応用の利く方法がいいな」
	「…。」	「教科書〇〇ページをみて。昔の人はピラミッドを計測するのに、棒にできた影を利用して角度を計算しました。この方法を利用してはどうでしょう？」
	「いいね！」	
		「これで実際に測れるね。では次回玄関前に集合。寒いので上着を忘れずに。」
２ｈ目	（次回）	「では、実際に測ってみます。各班に分かれて、測りやすい影のあるスポットを探して計測してみよう！ちなみに測りやすいスポットは２つあります。」
	（各班、スポットを探して角度と影の長さを計測。その場で三角比の表を使って、計算し校舎の高さを出す）	
		「集合。では教室で確認します」
	（教室へ）	「各班、影の長さと角度、そして校舎の高さを教えてください。」
	「〇〇で校舎の高さは 14.48Mです」	「14M くらいになりましたね」
	「先生、自分たちの班、校舎が３階までのところの影でやってしまいました（校舎は４階建て）。だから、３で割って、１階分の高さ出して４をかけました。」	
		「おお！それはおもしろい！計算結果はどうなった？」
	「14.72M でした」	「では、結果発表します。実は事務長さ

	「おお！すごい！ほぼ当たってる！」	んに校舎の設計図を見せてもらって、校舎の高さを教えてもらいました。その結果は…」 「14.7Mです！」 「ね！三角比ってすごいよね！」 「では逆に微妙なズレは何で起きたかっていうと（あ、残り時間２分だ、言ってしまおう）、本当は 29.7°で、それを 30°として計算してしまったかもしれないし、影を測った時間と角度を測った時間に微妙なズレが起きてしまったからかもしれないね」 「とにかく、この方法を利用すると、直接じゃなくてもものの高さを測ることができます！建築関係でよく使ってるんですよ。」

②三角比の相互関係の公式を見つけよう！

今まで、三角比の相互関係の導入を「公式証明」から入っていました。ただ、本校の生徒にとっては難しく、結局公式の暗記になってしまった経験をしてきました。
「発見的に公式を見つけて、なぜこんな公式になるのか？と思ってもらってから公式の証明をする」という方がわかりやすいと思い、こんな授業をやってみました。

	生徒の動き	教師の働きかけ
１０分		「今日は教科書の最後のページをひらいてください。今日使うのは電卓」 ※商業高校なので電卓はお手の物。
	三角比の表には法則がある。それは何か？	
	「角度が増えると sinA と tanA は増えていて、cosA は減っている」	「お、マジカル頭脳指数（死語）20 点のところを見つけたね！」 「もっと、点数の高い法則があります。」
	「sinA と cosA は逆になってる！」	「どういうこと？」
	「sinA は 0°のとき０からスタートして、次の 1°は 0.00175 と続いて、cosA は 90°のとき０からスタートして、次の 89°は 0.00175 と続く。」	「おお！すごい！（sinA=cos(90°－A)の方を見つけたか！）70 点だね！これは次の次でやる内容です。よく見つけた！」 「80 点以上の法則は電卓を使います。」 「ヒント！」 「①sinA と cosA をそれぞれ（　　）回（　　）して（　　）と（　　）になる。」
	（電卓カタカタ…）	「②sinA を cosA で（　　）と（　　）になる。」 「ただし、多少の誤差はでます。本当は sin1°は 0.0175…と続きますからね」
	「先生！②は（割る）と tanA になる」	「素晴らしい！90 点！式でかくと？」
	「sinA÷cosA＝tanA」	「そうです！これを反対にして、分数で表したのが教科書に載っている

	「あ、教科書にかいてあるじゃん！」 「$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$、だから（２）回かけて（たす）と（１）になる」 「本当だ。１になるね。すごい！」  「$\sin A = \dfrac{たて}{ななめ}$、$\cos A = \dfrac{よこ}{ななめ}$ 」 「$(たて)^2 + (よこ)^2 =$（ななめ）^{2}」 「！三平方の定理だ。」	$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ ですね。では、①の方は？」 「しまった（笑）。」 「反則（笑）。本当にそうなるか色々な角度で試してみて。」 ←電卓を四捨五入設定にすると必ず１に。 「だね。100 点問題だけど反則 50 点。」 「では、今出た①$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ について、なぜこんな法則ができるのか、考えていきます」 「そもそも sinA と cosA は定義は？」 「なので①に代入すると $\left(\dfrac{たて}{ななめ}\right)^2 + \left(\dfrac{よこ}{ななめ}\right)^2 = 1$ となります。」 「分数は嫌なので両辺に（ななめ）^{2} をかけて、分数ではない形にしてください」 「ok!　これって実は今までに習った公式なんだよね。なんだかわかる？」 「その通り！つまり、逆に三平方の定理を式変形していくと、$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ になるからこんな法則が成り立つんだよ！」 「次回は②の公式がなぜ成り立つか？考えて、問題演習します。」

数学ってすごい！→生徒ってすごい！

私自身が強く「数学ってすごい！」と思った経験は２つ。

１つ目が「実際に生活に役立っていることを知ったとき」。「複素数って数学だけのお話かと思っていたけど回路解析等の現実の場面でも役立つんだ」など、「数学は現実場面でも利用でき役立っている」ことを知ったとき「数学ってすごい」と思いました。そんな訳で「数学を直感的に役立っていると感じられる授業を」と思い練ってみたのが①の授業。生徒は計算結果が実際の高さとほぼ同じ値になって「数学すごい」と思ったようでした。しかしそれ以上に「３階までなので３で割って４かけた」という柔軟な発想をする生徒。私は「生徒ってすごい！」と逆に思わされました。

２つ目は「法則を発見したとき」。

「$3^2=4+5 \to 3^2+4^2=5^2$」「$5^2=12+13 \to 5^2+12^2=13^2$」

中学生の頃、「奇数の２乗をＡ、そのＡを２で割った数に近い連続する整数をＢ、Ｃ（Ｂ＜Ｃ）とすると『$A^2+B^2=C^2$』になる」ということを発見し興奮した記憶があります。文字式で証明すると大した話ではないのですが、当時は「どんな場合でも成り立つ！！おおすごい！！」と興奮してました。

このような定理（法則）を発見する喜びが「この場合でも、あの場合でも絶対成り立つ！」という「数学の完全性のすごさ、美しさ」を感じ「数学ってすごい！」につながると考えています。その経験を生徒にしてもらいたい、と思い「発見学習」を今回組み立ててみました。確かに「数学ってすごい、おもしろい」と思ってもらえた生徒がいましたが、それ以上に「$\sin A=\cos(90°-A)$をさらっと見つけ出す」生徒に「おお、生徒ってすごい！」と思わされた授業でした。

余談ですが、今後行っていく、データの分析の問題のときほど「意外なもの同士が正の相関がある」ことに気づかせ「数学ってすごい！」と思ってもらえるチャンスがあると私は思っています。生徒にとっての「大学での研究意欲」にもつながるでしょう。ただ、データの分析方法を知るだけでなく、分析から有意な相関を生徒がみつけ、「おもしろい！もっとみつけたい（大学で研究したい）！」というところまで、もっていけるかがこの章で大切なことではないかと個人的には考えています。そのためにおもしろいデータの題材を集めようと、現在調べています。「科学の道具箱」で検索すると面白いデータがありましたが、もし何か面白いデータがありましたら教えていただけると幸いです。

お便りの御礼

愛知県の林様より、前回のレポートのご高評と林様のご研究についてのお手紙を頂きました。この場をお借りして御礼申し上げます。（大変遅くなりまして申し訳ございません！）

その中で「M乗数の表の観察」というものに私自身も大変興味を持ちましたのでご紹介させていただきます。

１から１０までの整数をそれぞれ１～９乗したものを表にしたものです。すると、色々な法則があることに気づかされます。例えば一の位が、偶数乗のときは５を中心として同数に、奇数乗のときは５を中心にみると「たして１０（４と６、３と７…）」になっています。そして一の位が（４ｎ＋１）乗の周期で同じになります。このような法則のキレイさ・すごさとともに「なんでそうなるの？」という気持ちが沸き、文字を用いて一般化し、証明しようと色々試行錯誤したくなる興味深い題材です。

この林様のご実践の「表にまとめ、自ら法則性をみつける」という点に教育的価値を非常に感じました。数学の美しさは至る所にあり、それに自ら気づくことで「おお、数学ってすごい！」につながるものだと思います。私自身も大変勉強になった題材で考察の観点も勉強になりました。改めて林様に御礼申し上げます。

この「M乗数の表の観察」からも思いましたが、「数学ってすごい！」と思うときは

数学の規則や発想の美しさに気づいたとき

数学が役立っていると感じるとき

だと感じました。そう思えば、解き方の指導だけに夢中になっていた２次方程式の解き方も、「因数分解し０の性質を利用して解く」という着眼点は「すごい」発想です。

様々な試験に追われ、「解き方重視」になりがちだった自分を戒め、数学にちりばめられている「数学のすごさ」を伝えられるような授業を目指していこうと思います。

散文で恐縮ですが、最後まで読んで頂きありがとうございました。