

対数の導入

北海道札幌月寒高等学校 教諭 正田 隆之

I 対数の導入

「対数」＝「指数」……「何乗か」

問. 16 の対数は？ ……16 の指数？

解 1. $16 = 2^4 \cdots$ 指数＝対数 であるから
16 の対数は 4 $\Rightarrow \log 16 = 4$ で表す

解 2. $16 = 4^2 \cdots$ 指数＝対数 であるから
16 の対数は 2 $\Rightarrow \log 16 = 2$ で表す

16 の対数は 4 と 2 ?

解 1 と解 2 の違いは「底」、つまり

「底」が異なると対数（指数、何乗か）は異なる

正しくは

解 1. $16 = 2^4 \cdots$ 指数＝対数
2 を底とする 16 の対数は 4 $\Rightarrow \log_2 16 = 4$

解 2. $16 = 4^2 \cdots$ 指数＝対数
4 を底とする 16 の対数は 2 $\Rightarrow \log_4 16 = 2$

一般に

$M = a^p$ のとき「 a を底とする M の対数は p 」

といい 「 $\log_a M = p$ 」 で表す

$$\log_a M = p \iff M = a^p$$

↑
P 乗

注意

1. 「対数」＝「指数」 だが
「対数関数」≠「指数関数」

2. 対数関数を「指数関数の逆関数」で定義する際の混乱

指数関数の変数 x は指数であるが、

$$y = 2^x \quad \text{指数関数}$$

対数関数の変数 x は対数ではない。

$$y = \log_2 x \quad \text{対数関数}$$

真数

II 常用対数の導入

「常用対数」……「10 の何乗か」

1. 1桁の自然数は10の何乗か

1桁の自然数 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 について

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10$$

が成り立ち

$$1=10^0 \quad 10=10^1$$

であるから

$$10^0 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10^1$$

つまり、「1桁の自然数」= $10^{0.\text{*****}}$ である。

2. 近似値を求める

《参考文献「指数・対数のはなし」森 毅 著 東京書籍》

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 について、「10 の何乗か」近似値を求めよう。

■ $\log_{10} 2$ …… 2 は 10 の何乗か

$$2^{10}=1024 \div 1000=10^3$$

であるから $(2^{10})^{\frac{1}{10}}=(10^3)^{\frac{1}{10}}$

よって

$$2=10^{0.3}$$

「2 は 10 の 0.3 乗」すなわち「 $\log_{10} 2 = 0.3$ 」

■ $\log_{10} 3$ …… 3 は 10 の何乗か

$$3^4=81 \div 80=8 \times 10=2^3 \times 10$$

$$=(10^{0.3})^3 \times 10=10^{0.9} \times 10^1=10^{1.9}$$

であるから $(3^4)^{\frac{1}{4}}=(10^{1.9})^{\frac{1}{4}}$

よって

$$3=10^{0.475}$$

「3 は 10 の 0.475 乗」すなわち「 $\log_{10} 3 = 0.475$ 」

■ $\log_{10} 4$ …… 4 は 10 の何乗か

$$4=2^2=(10^{0.3})^2=10^{0.6}$$

よって

$$4=10^{0.6}$$

「4 は 10 の 0.6 乗」すなわち「 $\log_{10} 4 = 0.6$ 」

■ $\log_{10} 5$ …… 5 は 10 の何乗か

$$5=10 \div 2=10 \div 10^{0.3}=10^{1-0.3}=10^{0.7}$$

よって

$$5=10^{0.7}$$

「5 は 10 の 0.7 乗」すなわち「 $\log_{10} 5 = 0.7$ 」

■ $\log_{10} 6$ …… 6 は 10 の何乗か

$$6=2 \times 3=10^{0.3} \times 10^{0.475}=10^{0.775}$$

よって

$$6=10^{0.775}$$

「6 は 10 の 0.775 乗」すなわち「 $\log_{10} 6 = 0.775$ 」

■ $\log_{10} 7$ …… 7 は 10 の何乗か

$$7^2=49 \div 50=100 \div 2=10^2 \div 10^{0.3}$$

$$=10^{2-0.3}=10^{1.7}$$

であるから $(7^2)^{\frac{1}{2}}=(10^{1.7})^{\frac{1}{2}}$

よって

$$7=10^{0.85}$$

「7 は 10 の 0.85 乗」すなわち「 $\log_{10} 7 = 0.85$ 」

■ $\log_{10} 8$ …… 8 は 10 の何乗か

$$8=2^3=(10^{0.3})^3=10^{0.9}$$

よって

$$8=10^{0.9}$$

「8 は 10 の 0.9 乗」すなわち「 $\log_{10} 8 = 0.9$ 」

■ $\log_{10} 9$ …… 9 は 10 の何乗か

$$9=3^2=(10^{0.475})^2=10^{0.95}$$

よって

$$9=10^{0.95}$$

「9 は 10 の 0.95 乗」すなわち「 $\log_{10} 9 = 0.95$ 」

※ 常用対数表を使って調べた値と比較してみよう。