三角関数の合成

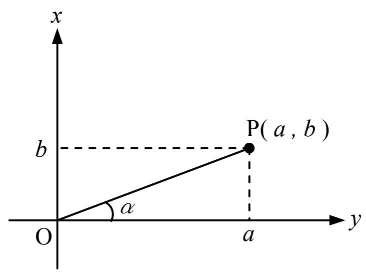
$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

三角関数の合成は、高校の教科書では次のような証明が一般的です。

（証明）

$a = r\cos\alpha \qquad b = r\sin\alpha$ 　とおくと，

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$



これと，加法定理により

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta \\ &= r(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) \\ &= r\sin(\theta+\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

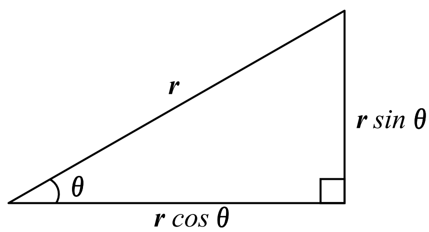
とてもスマートな証明です。ところで、この合成は一体どのようなことを意味しているのでしょう。ここでは、その意味を測量の視点から解説します。

■測量の基本計算

直角三角形について、斜辺と角度から高さ、底辺をそれぞれ求めるための基本となる計算式です。

高さ$= r\sin\theta$

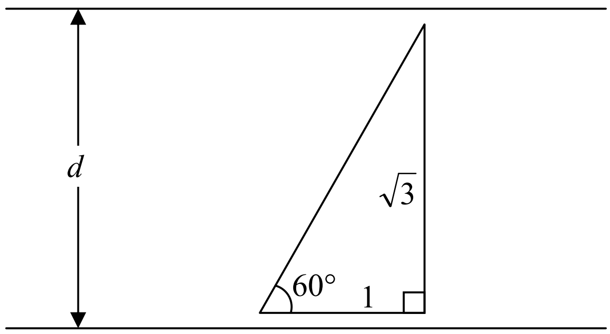
底辺$= r\cos\theta$



これにより，斜辺 r の長さと角度 θ を測れば，三角比の表で *sin* θ，*cos* θ の値を調べて，高さと底辺の値を求めることができます。

■幅を測ろう

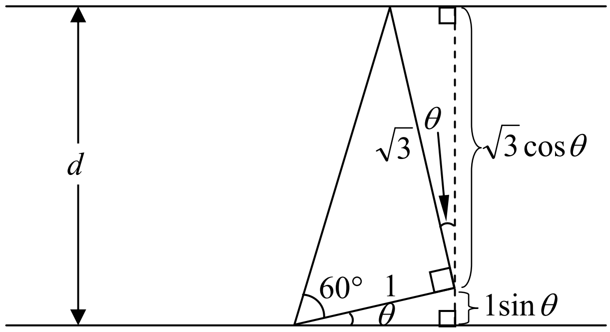
図のような三角定規を使って，幅 d を測ってみよう。



※使用する道具は、この三角定規と分度器と三角比の表

測り方①

三角定規を図のように傾ける



幅 d は，次のように計算できる

$$d = 1\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$$

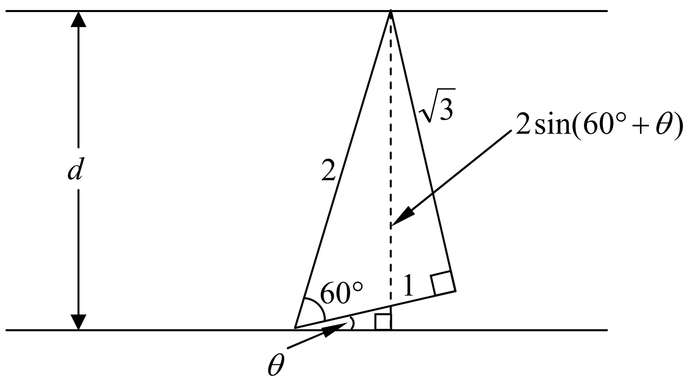
ここで，$\theta = 15°$ とすると，三角比の表より

$$\sin 15° = 0.25882,\quad \cos 15° = 0.96593$$

よって，　$d = 1 \times 0.25882 + \sqrt{3} \times 0.96593 = 1.93186$

測り方②

三角定規を図のように傾ける



幅 d は，次のように計算できる

$$d = 2\sin(60° + \theta)$$

測り方①と同様に、$\theta = 15°$ とすると，

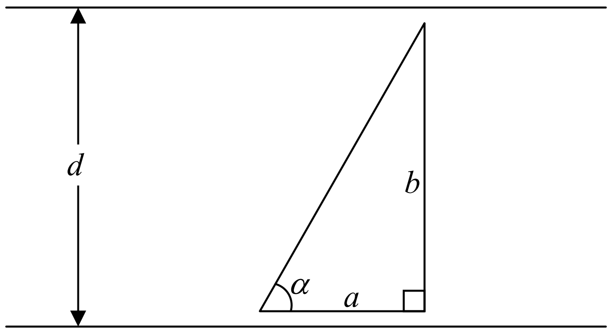
$$d = 2\sin(60° + 15°) = 2\sin 75°$$

三角比の表より $\sin 75° = 0.96593$ だから

$$d = 2 \times 0.96593 = 1.93186$$

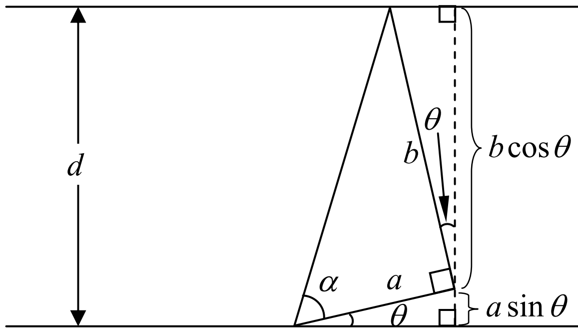
これを一般化して、三角関数の合成の公式を導く

■直角三角形を使って幅 d を測る



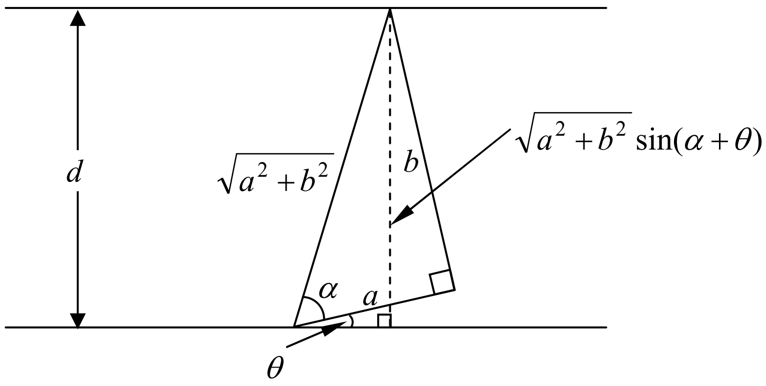
測り方①

三角定規を図のように傾ける



$$d = a\sin\theta + b\cos\theta \quad \cdots\cdots①$$

測り方②



$$d = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \quad \cdots\cdots②$$

①②より　$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$